

EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Aborda-se, nesta aula, um conteúdo recorrente em provas de matemática de concursos e que também funciona como pré-requisito em diversos outros temas. Assim, observa-se que o assunto das equações de segundo grau pode aparecer dentro de tópicos como geometria, progressões aritméticas e progressões geométricas. Isso ocorre porque muitas questões de matemática, ao serem desenvolvidas, acabam resultando em uma equação de segundo grau, exigindo a sua resolução e a análise das raízes, inclusive para identificar qual raiz é possível ou não, bem como o significado de cada resultado.

Dessa forma, trata-se de um assunto que, em alguns casos, aparece isoladamente nas provas de concursos públicos ou, em outros, surge durante o desenvolvimento de uma questão. Trata-se, portanto, de um tema cujo estudo é relativamente simples. A resolução será demonstrada de duas maneiras distintas, permitindo que se escolha a forma que apresentar maior facilidade. O conteúdo é considerado acessível e de aprendizagem definitiva.

ÁLGEBRA – EQUAÇÕES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Iniciando-se o estudo das equações do segundo grau, questiona-se por que recebem essa denominação. Observa-se que, em alguns editais, o tópico aparece sob o nome de álgebra, especificamente como equações ou sistemas de equações do segundo grau.

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ condição $a \neq 0$ a, b, c = coeficientes. Se o coeficiente a for 0, será uma equação do 1º grau.

Existe uma condição extremamente relevante: o reconhecimento da equação de segundo grau ocorre porque há a presença de três termos – o termo ax^2 , o termo bx e o termo c . Entende-se por termos os elementos separados pelos sinais de adição ou subtração. Assim, tem-se o primeiro termo (ax^2), o segundo termo (bx) e o terceiro termo, chamado de termo independente (c), por não conter incógnita.

Ressalta-se que não é obrigatório que os três termos estejam presentes. O terceiro termo pode ser igual a zero e desaparecer. O segundo termo, associado a x , também pode desaparecer. Entretanto, o termo que contém x^2 não pode desaparecer. Por essa razão, estabelece-se uma condição essencial chamada condição da equação do segundo grau.

A condição consiste em que o coeficiente A não pode ser igual a zero. Isso porque, é o responsável por caracterizar a equação como sendo de segundo grau.

Agora apresenta-se outro conceito: coeficientes. Assim, os coeficientes são números. São números. São números. Em seguida, identificam-se os coeficientes: A , B e C . Desse modo, há o coeficiente A , o coeficiente B e o coeficiente C .



5m

Na continuidade, estabelece-se a seguinte condição: é fornecida uma equação do segundo grau. Observa-se que o expoente é 2. Esse expoente é o elemento que determina o grau do polinômio. Trata-se, portanto, de um polinômio de grau 2. Dessa forma, deve existir um x^2 . O x^2 encontra-se presente. Esse termo não pode desaparecer, razão pela qual o coeficiente A deve ser diferente de zero. Caso o coeficiente A seja igual a zero, obtém-se $0 \cdot x^2$, fazendo com que o termo desapareça. Restam, então, $Bx + c$, constituindo equação do primeiro grau, pois o expoente do x é 1.

Assim, apresenta-se a condição de existência para uma equação do segundo grau. O termo que contém x^2 , isto é, o coeficiente A, não pode ser zero. Esse ponto já se encontra compreendido.

O x possui expoente 1, que não necessita ser indicado, por constituir conhecimento já implícito.

Prosseguindo, registra-se que a , b e c são os coeficientes. O coeficiente a não pode ser igual a zero, pois, conforme já mencionado, sua anulação transforma a expressão em equação do primeiro grau. Esse conteúdo já foi anteriormente estudado.

A equação é considerada do 2º grau pois um dos seus termos obrigatoriamente será elevado ao quadrado.

O grau da equação determina a quantidade de resultados. Assim, a equação do primeiro grau possui apenas uma raiz, constituindo uma única solução.

Essas soluções podem ser diferentes e também podem ser iguais. Consequentemente, esse aspecto exige atenção. As raízes podem ser iguais, podem ser diferentes ou, em algumas situações, podem não existir no conjunto dos números reais. Esse aspecto possui relevância. Uma questão da FGV relaciona-se com esse ponto no desafio apresentado.

Obs.: a princípio, a equação do 2º grau tem duas raízes (X' , X''), que são responsáveis por fazer com que a questão se torne 0. O grau da equação determina a quantidade de raízes.

Registra-se ainda que, em diversas situações, emprega-se o método de Bhaskara apenas pela técnica, sem compreensão completa do processo, embora a finalidade essencial seja a determinação das raízes.

Em seguida, apresenta-se o exemplo: $x^2 - 7x + 10$. Trata-se de equação do segundo grau igual a zero. Essa equação assume a forma $ax^2 + bx + c = 0$. Essa constitui a estrutura de uma equação do segundo grau.

Ao serem determinadas as raízes – já indicadas – será possível verificar x' e x'' . Nesse exemplo, x' e x'' correspondem a 2 e 5.

O objetivo apresentado consiste em demonstrar o seguinte: ao se encontrar as raízes, é necessário compreender qual é a função que elas exercem. Busca-se, portanto, que



10m

se compreenda o que está sendo feito, onde se está chegando e qual é a finalidade do procedimento. Para isso, utilizam-se dois métodos, que serão empregados adiante: o método de Bhaskara e, posteriormente, o método do somatório e produto. Pretende-se, desde logo, que essa compreensão seja clara.

As raízes possuem a função de tornar a equação igual a zero. Para ilustrar, substitui-se o valor 2 na equação: $2^2 - 7 \cdot 2 + 10$. Procedendo ao cálculo, verifica-se: $2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$. Assim, confirma-se que, ao substituir a raiz encontrada na equação, obrigatoriamente o resultado deve ser zero.

Em seguida, procede-se da mesma forma com a outra solução, pois o raciocínio exige a verificação das duas. Considera-se agora a raiz 5, substituindo-a na equação: $5^2 - 7 \cdot 5 + 10$. Obtém-se: $5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$. Assim, confirma-se novamente que a equação resulta em zero. Essa é a ideia fundamental: a equação de segundo grau apresenta duas soluções, enquanto a equação do primeiro grau apresenta apenas uma solução, pois somente um valor de x seria capaz de torná-la igual a zero. No caso da equação de segundo grau, são duas as soluções que tornam a expressão igual a zero, denominadas x' e x'' .

A partir disso, observa-se a seguinte questão: de que maneira essas raízes são encontradas? Para tal finalidade, serão apresentados dois métodos. O primeiro é o método do somatório e produto, abordagem bastante prática, e o segundo é a fórmula de Bhaskara, tradicionalmente utilizada ao longo da formação escolar.

No que se refere às questões de concurso, a matriz de estudo é integralmente atualizada. Durante a resolução, as questões serão solucionadas pelos dois métodos. Constata-se que cada estudante possui facilidades e dificuldades próprias; alguns preferem utilizar Bhaskara com maior segurança, ainda que o procedimento demande alguns segundos a mais, enquanto outros possuem maior agilidade para identificar as raízes visualmente, de modo que o método do somatório e produto torna-se mais conveniente.

Por essa razão, ambos os métodos serão apresentados. Assim, recomenda-se o uso do método que proporcione maior segurança e precisão, uma vez que o essencial é acertar a questão.



15m



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. $1x^2 + 7x + 10 = 0$, em que $a = 1$; $b = 7$; $c = 10$



Soma e Produto

- A soma das raízes é $x' + x'' =$

$$\frac{-b}{a}$$

- A multiplicação das raízes é $x' \cdot x'' =$

$$\frac{c}{a}$$

Reconhece-se que se trata de uma equação do segundo grau. Por exemplo, essa equação é denominada equação completa. É considerada completa porque apresenta todos os coeficientes: A, B e C.

Pode-se ter, por exemplo, a expressão $x^2 - 4x = 0$. Trata-se igualmente de equação do segundo grau, porém é classificada como equação incompleta, pois não possui os três coeficientes. Isso não gera qualquer impedimento, uma vez que a resolução ocorre da mesma forma.

Na equação completa apresentada, o coeficiente A é igual a 1, pois corresponde ao número que multiplica x^2 . O coeficiente B é igual a 7, por ser aquele que multiplica x. O coeficiente C é denominado termo independente, sendo o termo que permanece isolado. Dessa forma, trata-se de uma equação completa do segundo grau.

No outro exemplo apresentado, observa-se a seguinte expressão: $2x^2 - 4x = 0$. O coeficiente A é 2 e o coeficiente B é -4. Ressalta-se que o sinal integra o coeficiente numérico. O coeficiente C é igual a zero, pois não está presente.

Também é possível considerar outra forma, como em $2x^2 = 0$. Não há qualquer problema nessa configuração. Nela, o coeficiente A é 2, enquanto os coeficientes B e C são iguais a zero. Ainda assim, trata-se de equação do segundo grau. Em seguida, serão respondidas as questões apresentadas.

A observação realizada indica que essa forma constitui uma equação incompleta, pois contém apenas os coeficientes A e B. No segundo exemplo, $2x^2 = 0$, há somente o coeficiente A, inexistindo B e C. Ambas são classificadas como equações incompletas.

Retorna-se ao exemplo inicial. Observa-se novamente a equação de segundo grau $x^2 + 7x + 10 = 0$. Identificam-se, então, suas duas raízes, ou seja, os valores que tornam a equação igual a zero.

Deve-se registrar, inicialmente, o método utilizado (soma e produto), considerado bastante adequado e recomendável.

Quando há uma equação completa – ou até mesmo incompleta – não ocorre qualquer alteração, pois o método se aplica a ambas. Assim, considera-se a expressão $x^2 + 7x + 10 = 0$, com o objetivo de se encontrarem as raízes. Pelo método da soma e do produto, a soma corresponde ao termo “mais” e o produto refere-se à multiplicação.

Pelo método de soma e produto, obtém-se que as duas raízes x' e x'' serão sempre iguais a:

$$\bullet \quad x' + x'' =$$

$$\frac{-b}{a}$$

$$\bullet \quad x' \cdot x'' =$$

$$\frac{c}{a}$$

Em seguida, observa-se novamente a equação. Procede-se, primeiramente, à separação dos coeficientes A, B e C. O coeficiente A é igual a 1, por ser aquele que multiplica x^2 . O coeficiente B é igual a 7, por multiplicar o x. O coeficiente C é o termo independente.

Assim, o objetivo é determinar que dois números x' e x'' , quando somados, resultam em $-b$, ou seja, -7 , sobre a, que é igual a 1; portanto, a soma deve ser -7 . Desejam-se dois números que, somados, resultem em -7 . Esses mesmos números, quando multiplicados, devem equivaler a C dividido por A, isto é, 10 sobre 1, que resulta em 10.

A partir disso, substitui-se diretamente. Pensa-se, então, em dois números que, multiplicados, fornecem 10 e que, somados, resultam em -7 . Esse é o ponto em que costuma surgir a dificuldade, pois inicia-se a busca: por exemplo, (-2) multiplicado por (-5) – uma vez que produto de dois números negativos é positivo – resulta em 10. Portanto, as raízes são -2 e -5 . A resolução é rápida, porém a dificuldade geral reside em encontrar tais valores.

Obs.: esse é apenas o primeiro método. Posteriormente, utiliza-se o método da fórmula de Bhaskara.

Para facilitar a identificação dos números desejados, observa-se o coeficiente C. Em seguida, inicia-se com o número 1. Verifica-se que 1 vezes 10 é igual a 10. Depois, consideram-se o 2, o 3, o 4 e assim sucessivamente, aumentando gradualmente.



20m

Desse modo, encontra-se a combinação correta. Esse é o primeiro método, e não há obrigatoriedade de utilizá-lo, pois existe outro mais simples, embora o primeiro seja mais rápido. Coloca-se o número 10 e, abaixo, o número 1. Observa-se: 1 vezes 10 é 10. Em seguida, analisa-se se, com 1 e 10, somando ou subtraindo, obtém-se 7. Como isso é impossível, passa-se ao valor 2.

Verifica-se: 2 vezes 5 é 10. Observam-se os valores 2 e 5 e, com eles, verifica-se se é possível obter -7. Isso ocorre quando ambos os números são negativos. Assim, são obtidos -2 e -5, que correspondem às raízes.

Esse é o primeiro método, não havendo qualquer dificuldade adicional. Em seguida, reforça-se novamente: toma-se o coeficiente C, faz-se uma marcação, inicia-se com 1 e pergunta-se quem multiplicado por 10 resulta em 10. Em seguida, verifica-se se a soma ou diferença fornece 7. Como isso não ocorre com 1 e 10, considera-se o número 2. Observa-se que 2 vezes 5 é igual a 10 e que, com esses valores, a soma pode resultar em -7 quando ambos forem negativos: -2 e -5. O produto de -2 e -5 é 10, o que confirma o resultado.

Esse foi o primeiro método. Em seguida, treina-se um pouco mais e emprega-se o segundo método, que é a fórmula de Bhaskara, método já conhecido.

Considera-se novamente $x^2 + 7x + 10 = 0$. A fórmula de Bhaskara é aplicada utilizando-se o discriminante, denominado delta. O delta é calculado como $b^2 - 4ac$. Identificam-se os valores: $a = 1$, $b = 7$ e $c = 10$. Assim, $7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$. O delta resulta em 9. Observa-se que esse procedimento demanda maior tempo, embora possa ser realizado sem dificuldades. Segue-se, então, para o cálculo de x, uma vez obtido o delta. Utiliza-se a expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = x' = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x'' = \frac{-10}{2} = -5$$

Obs.: prossegue com o treinamento, sem necessidade de preocupação, pois todas as questões serão feitas por ambos os métodos. Caso haja preferência exclusiva pela fórmula de Bhaskara, também é possível utilizá-la. Contudo, é recomendado exercitar igualmente o método da soma e do produto.

Este material foi elaborado pela equipe pedagógica do Gran Concursos, de acordo com a aula preparada e ministrada pelo professor Josimar Padilha.

A presente gravação tem como objetivo auxiliar no acompanhamento e na revisão do conteúdo ministrado na videoaula. Não recomendamos a substituição do estudo em vídeo pela leitura exclusiva deste material.



25m