

INEQUAÇÕES DO 1º GRAU III

INEQUAÇÕES PRODUTO



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

A) $(x + 2) \cdot (2x - 1) > 0$



A multiplicação e a divisão seguem praticamente o mesmo princípio, porém não se trata de interseção, mas de multiplicação de sinais.

No caso das inequações produto, identifica-se esse tipo de inequação quando há multiplicação entre fatores. Assim, realiza-se a multiplicação dos sinais.

Considera-se a primeira expressão como $f(x)$ e a segunda como $g(x)$. Quando se tem uma expressão do tipo $a \cdot b = c$, a é o primeiro fator, b é o segundo fator e c é o produto. Trata-se de uma inequação de produto porque há multiplicação entre duas expressões, e é uma inequação porque há uma desigualdade, indicada pelo sinal de maior que zero.

Inicialmente, igualam-se os fatores a zero. Considera-se o primeiro fator como $f(x)$ e o segundo como $g(x)$.

Tem-se $f(x) = x + 2$

Igualando a zero, obtém-se:

$$x + 2 = 0$$

Logo,

$$x = -2$$

A análise da desigualdade será realizada posteriormente.

Em seguida, considera-se o segundo fator:

$$g(x) = 2x - 1$$

Igualando a zero:

$$2x - 1 = 0$$

Assim,

$$x = \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$x = -2 \text{ e } x = \frac{1}{2}.$$

Em seguida, analisa-se o comportamento das funções. Considera-se inicialmente $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 2x - 1$. Trata-se de funções do primeiro grau, do tipo $ax + b$. Quando o coeficiente angular a é maior que zero, o gráfico da função é crescente. Quando a é menor que zero, o gráfico é decrescente.



5m

Para $f(x) = -2$, o coeficiente angular é $a = 1$, que é positivo. Portanto, a função é crescente. Assim, à direita da raiz, os valores da função são positivos, e à esquerda, negativos.

Para $g(x) = \frac{1}{2}$, o coeficiente angular é $a = 2$, que também é positivo. Logo, a função é crescente. Assim, à direita da raiz, os valores da função são positivos, e à esquerda, negativos.

O objetivo é analisar o produto $f(x) \cdot g(x)$. Consideram-se os pontos críticos $x = -2$ e $x = \frac{1}{2}$. Como ambas as funções são crescentes, para $f(x)$, os valores são negativos à esquerda de -2 e positivos à direita. Para $g(x)$, os valores são negativos à esquerda de $\frac{1}{2}$ e positivos à direita. Inicialmente, utiliza-se a representação com intervalos para analisar os sinais. Posteriormente, verifica-se o tipo de bolinha que deve ser utilizada nos pontos críticos. Como a desigualdade é estritamente maior que zero, utilizam-se bolinhas abertas, pois os valores que anulam a expressão não pertencem à solução.



10m

Realiza-se, então, a multiplicação dos sinais em cada intervalo. No intervalo à esquerda de -2 , tem-se sinal negativo para $f(x)$ e negativo para $g(x)$. Logo, o produto é positivo.

No intervalo entre -2 e $\frac{1}{2}$, tem-se sinal positivo para $f(x)$ e negativo para $g(x)$. Assim, o produto é negativo.

No intervalo à direita de $\frac{1}{2}$, ambos os sinais são positivos, resultando em produto positivo. Como se deseja que o produto seja maior que zero, selecionam-se os intervalos em que o resultado é positivo. Portanto, a solução corresponde aos valores de x menores que -2 ou maiores que $\frac{1}{2}$.

Assim, a solução corresponde às regiões em que o resultado é positivo, pois se deseja valores maiores que zero, o que implica sinais positivos.

B) $(x - 3) \cdot (1 - 4x) \leq 0$



Passa-se à resolução de outro exemplo. O procedimento consiste em determinar o valor de x em cada função, verificar se cada função, separadamente, é crescente ou decrescente, realizar a análise de sinais e, por fim, identificar a resposta, seguindo esse passo a passo.



15m

Considera-se o primeiro fator como $f(x)$ e o segundo como $g(x)$. Inicialmente, iguala-se $f(x)$ a zero. Tem-se:

$$f(x) = x - 3$$

Igualando a zero:

$$x - 3 = 0$$

$$\text{Logo, } x = 3$$

Em seguida, iguala-se $g(x)$ a zero:

$$g(x) = 1 - 4x$$

Igualando a zero:

$$1 - 4x = 0$$

Transferindo o 1 para o outro lado:

$$-4x = -1$$

Dividindo ambos os lados por -4 :

$$x = \frac{1}{4}$$

Obtêm-se, assim, os valores $x = 3$ e $x = \frac{1}{4}$.

Em seguida, analisa-se cada função separadamente. Para $f(x) = x - 3$, identifica-se o coeficiente angular $a = 1$, que é positivo. Portanto, a função é crescente. Sendo crescente, à direita da raiz os valores são positivos e, à esquerda, negativos.

Para $g(x) = 1 - 4x$, observa-se que o coeficiente angular é $a = -4$, pois é o número que acompanha o termo com x . Como o coeficiente angular é negativo, a função é decrescente. Assim, à esquerda da raiz os valores são positivos e, à direita, negativos.

Passa-se, então, à análise do produto $f(x) \cdot g(x)$. Consideram-se os pontos $x = \frac{1}{4}$ e $x = 3$. Como a desigualdade envolve o sinal menor ou igual, utilizam-se bolinhas fechadas nesses pontos, pois os valores que anulam a expressão pertencem ao conjunto da solução.

Distribuem-se os sinais conforme o comportamento de cada função. Para $f(x)$, os valores são negativos à esquerda de 3 e positivos à direita. Para $g(x)$, os valores são positivos à esquerda de $\frac{1}{4}$ e negativos à direita.

Realiza-se a multiplicação dos sinais em cada intervalo. A análise é feita separando os intervalos pelos pontos críticos e multiplicando os sinais correspondentes em cada região. Como a desigualdade é menor ou igual, mantêm-se as extremidades fechadas, pois o interesse é identificar os intervalos em que o produto é negativo ou igual a zero, conforme indicado pela desigualdade.

Assim, procede-se ao jogo de sinais, multiplicando os sinais de $f(x)$ pelos sinais de $g(x)$ em cada intervalo para determinar o conjunto solução.



20m

Primeira parte: antes de $\frac{1}{4}$. Menos com mais resulta em menos. Menos com menos resulta em mais. E mais com menos resulta em menos. Assim, menos com mais resulta em menos; menos com menos resulta em mais; e mais com menos resulta em menos.

Retorna-se à análise da questão apresentada anteriormente. Trata-se de uma desigualdade. Observa-se que é menor ou igual. Se se deseja menor ou igual, devem-se considerar os valores negativos. Se fosse maior ou maior ou igual, seriam considerados os valores positivos. Como é menor ou igual a zero, busca-se o negativo. Assim, consideram-se essas extremidades. Considera-se essa parte para a esquerda. Essa será a solução.

A solução é expressa da seguinte forma: x pertence aos reais, tal que $x \leq \frac{1}{4}$ ou $x \geq 3$.

Pode parecer um pouco complexo, mas requer treino. Não é uma situação extremamente recorrente em provas. O mais comum costuma ser o sistema em que se analisa cada fator separadamente, posicionando-os na reta numérica e observando o que há em comum. Quando há aberto com fechado, prevalece aberto; fechado com fechado, prevalece fechado. A inequação do produto e a inequação quociente costumam ser menos frequentes, mas podem aparecer, motivo pelo qual devem ser estudadas.



25m

C) (2019/INSTITUTO EXCELÊNCIA/PREFEITURA DE TREMEMBÉ/SP/PROFESSOR/MATEMÁTICA)
Avalie a seguinte inequação $(x + 4) \cdot (3x + 2) < 0$

Sendo x um número real qualquer, qual o conjunto-solução para que a inequação acima seja satisfeita?

- a) $S = \{x / 4 > x > 2/3\}$.
- b) $S = \{x / -4 < x < -2/3\}$.
- c) $S = \{x / -4 < x < -2/3\}$.
- d) $S = \{x / 4 < x < 2/3\}$.



Considera-se o primeiro fator como $f(x)$ e o segundo como $g(x)$. Tem-se:

$$f(x) = x + 4$$

Igualando a zero:

$$x + 4 = 0$$

Logo:

$$x = -4$$

Analisa-se o gráfico de $f(x)$. Como a desigualdade é menor, utiliza-se bolinha aberta, pois serão considerados apenas os resultados negativos. Assim, marca-se -4 com bolinha aberta. Observa-se o coeficiente angular $a = 1$, que é positivo. Portanto, a função é crescente: à direita é positivo e à esquerda é negativo.

Agora, analisa-se $g(x)$:

$$g(x) = 3x + 2$$

Igualando a zero:

$$3x + 2 = 0$$

$$3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Utiliza-se bolinha aberta, pois a desigualdade continua sendo menor. Como o coeficiente angular $a = 3$ é positivo, a função também é crescente: à direita é positivo e à esquerda é negativo.

Colocam-se as duas funções uma abaixo da outra e realiza-se o jogo de sinais. Considera-se -4 e $-\frac{2}{3}$. Como $-\frac{2}{3}$ é maior que -4 , ele fica mais à direita na reta. Em seguida, traçam-se as linhas verticais nos pontos críticos e realizam-se as multiplicações dos sinais. Menos com menos resulta em mais; mais com menos resulta em menos; e mais com mais resulta em mais.

Busca-se o resultado negativo. Esse resultado está no intervalo entre -4 e $-\frac{2}{3}$. Assim, a solução é: $X \in \mathbb{R} / -4 < x < -\frac{2}{3}$.



INEQUAÇÕES QUOCIENTE

$$\frac{x + 4}{x - 1} \geq 0$$

Para finalizar, aborda-se a inequação quociente. A diferença é que, em vez de multiplicar, realiza-se a divisão. O jogo de sinais é o mesmo, pois menos dividido por menos resulta em mais, assim como menos vezes menos também resulta em mais. Mais com mais resulta em mais; mais com menos resulta em menos; e menos com menos resulta em menos, tanto na multiplicação quanto na divisão.

Há apenas um detalhe adicional: deve-se verificar a condição de existência. Como há divisão, o denominador não pode ser zero. Portanto, considera-se o denominador $x - 1 \neq 0$, que implica: $x \neq 1$

Após essa verificação, procede-se normalmente. Considera-se:

$$f(x) = x + 4$$

Igualando a zero:

$$x = -4$$

Depois:

$$g(x) = x - 1$$

Igualando a zero:

$$x = 1$$

Analisa-se $f(x)$. Como a desigualdade é maior ou igual, utiliza-se bolinha fechada em -4 . O coeficiente angular é $a = 1$, logo a função é crescente: à direita é positivo e à esquerda é negativo.

Analisa-se $g(x)$. Marca-se 1 com bolinha fechada inicialmente, pois a desigualdade é maior ou igual. O coeficiente angular também é positivo, tornando a função crescente: à direita é positivo e à esquerda é negativo.

Colocam-se as duas funções uma abaixo da outra e realiza-se a divisão dos sinais. Nos intervalos determinados por -4 e 1 , obtêm-se: menos com menos resulta em mais; mais com menos resulta em menos; e mais com mais resulta em mais.

Busca-se o resultado positivo. Assim, a solução preliminar seria: $x \leq -4$ ou $x \geq 1$

Contudo, deve-se observar a condição inicial de existência: $x \neq 1$. Portanto, o valor 1 não pode pertencer à solução. Assim, ajusta-se o resultado final para: $x \leq -4$ ou $x > 1$

Esse tipo de questão costuma ser menos frequente em provas, mas é importante conhecer o procedimento completo.

GABARITO

01. c

Este material foi elaborado pela equipe pedagógica do Gran Concursos, de acordo com a aula preparada e ministrada pelo professor Josimar Padilha.

A presente gravação tem como objetivo auxiliar no acompanhamento e na revisão do conteúdo ministrado na videoaula. Não recomendamos a substituição do estudo em vídeo pela leitura exclusiva deste material.