

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

PROPRIEDADES DE UMA PA

Em uma PA qualquer, de n termos e razão r , podem ser observadas as seguintes propriedades:

1. Qualquer termo de uma PA, a partir do segundo, é a média aritmética entre o anterior e o posterior (quantidade ímpar). Essa propriedade está expressa na fórmula abaixo:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, (k \geq 2)$$

CURIOSIDADE

Outro exemplo: ao se somar $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}$ tem-se o.

Assim, ao se fazer a média aritmética, encontra-se o termo do meio.

Uma das propriedades fundamentais de uma PA é que qualquer termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre o termo anterior e o posterior. Porém, essa propriedade se aplica apenas a uma quantidade ímpar de termos. Exemplo:

Considerando uma progressão aritmética em que o primeiro termo é 5 e a razão r é 3, tem-se:

- Primeiro termo (a_1): 5
- Segundo termo (a_2): 8
- Terceiro termo (a_3): 11
- Quarto termo (a_4): 14
- Quinto termo (a_5): 17

Ao se escolher os três primeiros termos da PA (A_1, A_2, A_3), o termo do meio (A_2) deve ser a média aritmética entre o anterior (A_1) e o posterior (A_3):

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{5 + 11}{2} = 8$$

Ou seja, a propriedade é mantida: o termo do meio é a média aritmética entre o termo anterior e o posterior. Isso só é possível porque está sendo trabalhada uma quantidade ímpar de termos.

Considerando uma PA com cinco termos:

- $a_1 = 5$
- $a_2 = 8$
- $a_3 = 11$
- $a_4 = 14$



5m

- $a_5 = 17$

Novamente, pode-se verificar que qualquer termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre o anterior e o posterior. Por exemplo, o termo a_3 (que é o terceiro termo) pode ser obtido pela média aritmética entre a_2 e a_4 :

$$A_3 = \frac{A_2 + A_4}{2} = \frac{8 + 14}{2} = 11$$

Esse é um exemplo claro de como a propriedade funciona. Ela é válida sempre que trabalhamos com uma quantidade ímpar de termos na PA.

Essa propriedade é muito útil para resolver questões de progressões aritméticas, pois permite calcular qualquer termo da PA a partir dos seus vizinhos.

Quando se trabalha com uma progressão aritmética (PA) e há uma quantidade ímpar de termos, a média aritmética dos termos nas extremidades sempre mostrará o termo do meio.

Assim, quando se tem uma PA, a soma dos dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos:

- $3 + 21 = 1 + 23 = 24$
- $5 + 19 = 1 + 23 = 24$
- $7 + 17 = 1 + 23 = 24$
- $9 + 15 = 1 + 23 = 24$
- $11 + 13 = 1 + 23 = 24$

Supondo que existam os cinco primeiros termos de uma PA com razão 3, como no exemplo anterior.

Ao se somar os termos nas extremidades (A_1 e A_5) e dividir por 2, o valor obtido é o termo do meio (A_3):

$$A_1 + A_5 = 5 + 17 = 22$$

$$22/2 = 11$$

Ou seja, a média entre o primeiro e o último termo é 11, que é o valor do termo do meio, como esperado. Essa propriedade é válida para qualquer PA com um número ímpar de termos.

Aplicando isso de outra forma, pegando o segundo e o quarto termo (A_2 e A_4), tem-se:

$$A_2 + A_4 = 8 + 14 = 22$$

$$22/2 = 11$$

Novamente, tem-se o termo do meio como a média dos termos nas extremidades selecionadas. Isso pode ser feito para qualquer par de termos, desde que o número total de termos seja ímpar.

Além disso, pode-se calcular a média aritmética de todos os termos da PA, como mostrado:

$$\text{Média Aritmética} = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5}{5}$$

$$\text{Média} = \frac{5 + 8 + 11 + 14 + 17}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

Essas propriedades são essenciais e facilitam bastante a resolução de questões de progressões aritméticas, pois muitas vezes, em vez de usar a fórmula do termo geral, pode-se aplicar essas propriedades e encontrar a resposta rapidamente.



10m

EXEMPLO DE QUESTÃO:

A soma de 5 termos de uma PA é 55. O primeiro termo é 5. Qual é o quinto termo dessa PA?

1. Sabe-se que a soma dos 5 termos é 55, e que o primeiro termo (A_1) é 5. A questão pede para encontrar o quinto termo (A_5).
2. Como há uma quantidade ímpar de termos (5 termos), é possível utilizar a média aritmética para encontrar o termo do meio, que é A_3 . A média aritmética é calculada pela soma de todos os termos dividida pela quantidade de termos:

$$\text{Média} = \frac{\text{Soma dos termos}}{\text{Quantidade dos termos}} = \frac{55}{5} = 11$$

Portanto, o termo A_3 é 11.

3. Sabe-se que $A_1=5$ e $A_3=11$, e agora é preciso encontrar os outros termos da PA. Para isso, será utilizada a propriedade que permite encontrar termos vizinhos. Como já se sabe o valor de A_1 e A_3 , pode-se calcular A_2 da seguinte maneira:

$$A_2 = \frac{A_1 + A_3}{2} = \frac{5 + 11}{2} = 8$$

Portanto, $A_2=8$.

4. Agora que se tem $A_1=5$, $A_2=8$, e $A_3=11$, pode-se continuar calculando os próximos termos. Como a razão da PA é constante e a diferença entre os termos consecutivos é sempre a mesma, pode-se calcular A_4 e A_5 .

- A razão r é $A_2 - A_1 = 8 - 5 = 3$, então, a diferença entre os termos é 3.
- Agora, pode-se calcular A_4 e A_5 :

$$A_4 = A_3 + r = 11 + 3 = 14$$

$$A_5 = A_4 + r = 14 + 3 = 17$$

Logo, $A_5 = 17$.

Conclusão: O quinto termo da PA é 17.

Resumo do raciocínio:

1. Utiliza-se a média aritmética para encontrar o termo do meio, $A_3=11$.
2. Utiliza-se a propriedade de média entre termos consecutivos para encontrar $A_2=8$.



15m

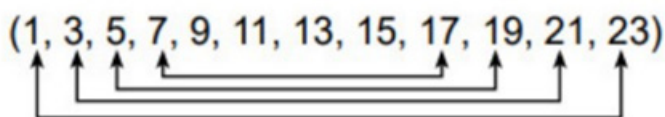
3. Calcula-se os termos seguintes com base na razão $r = 3$.

EXPLICAÇÃO SOBRE A SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Agora, será explicado sobre como calcular a soma dos termos de uma PA.

PROPRIEDADE DA SOMA DE TERMOS EQUIDISTANTES

Por exemplo, na PA (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23) observe que os termos 1 e 13 são equidistantes (estão a uma mesma distância). Ao somá-los, o resultado será 24, mesmo resultando da soma de 3 com 21 e de 5 com 19. Fazendo-se isso, encontra-se os termos equidistantes. Perceba que essas somas são sempre iguais, o que será importante para quando se falar na soma dos termos de uma PA.



Ao somar os termos de uma PA, os termos equidistantes da sequência (ou seja, termos que estão à mesma distância do início e do fim) têm sempre a mesma soma.

Exemplo Prático: Considerando uma PA com os termos 5,8,11,14,17, há termos equidistantes como $5 + 17 = 22$ e $8 + 14 = 22$, ou seja, a soma dos termos equidistantes é sempre a mesma. Isso vale para qualquer PA.

FÓRMULA PARA A SOMA DOS TERMOS DE UMA PA:

Com esse pensamento (a soma dos termos equidistantes de uma PA), chega-se à soma dos termos de uma PA finita. A soma dos termos de uma PA finita (S_n) será a soma do primeiro termo (a_1) mais o último que se soma (a_n), multiplicado pela quantidade de termos que se soma (n), dividido por dois. Divide-se por dois, pois sempre serão dobrados os valores. Trata-se da seguinte fórmula:

A partir desse raciocínio, há uma fórmula para somar os termos de uma PA. Para uma PA finita, com n termos, a soma S_n pode ser calculada pela fórmula:

$$S_n = \frac{(A_1 + A_n) \times n}{2}$$

Em que:

- A_1 é o primeiro termo,
- A_n é o último termo,
- n é o número total de termos da PA.

Essa fórmula basicamente soma os termos equidistantes (primeiro e último, segundo e penúltimo, e assim por diante) e depois divide por 2 para corrigir a duplicação.

EXEMPLO DE CÁLCULO DA SOMA DE UMA PA:

Para somar os 8 primeiros termos de uma PA, em que o primeiro termo é $A_1 = 1$ e o oitavo termo $A_8 = 16$, utiliza-se a fórmula:

$$S_8 = \frac{(A_1 + A_8) \times 8}{2} = \frac{(1 + 16) \times 8}{2} = \frac{17 \times 8}{2} = \frac{136}{2} = 68$$

Portanto, a soma dos 8 primeiros termos dessa PA é 68.



DIRETO DO CONCURSO



25m

01. (OBJETIVA/PREFEITURA DE SANTA CRUZ DE MONTE CASTELO-PR/AGENTE COMUNITÁRIO DE SAÚDE/2024) Em uma progressão aritmética, o terceiro termo é igual a 27 e o sexto termo é igual a 60. Sendo assim, qual é a soma dos 10 primeiros termos dessa progressão?

- a) 545
- b) 517
- c) 486
- d) 472



Agora que temos $A_1 = 5$ e $A_{10} = 104$, podemos calcular a soma dos 10 primeiros termos usando a fórmula:

$$S_{10} = \frac{(A_1 + A_{10}) \times 10}{2}$$

Substituindo os valores:

$$S_{10} = \frac{(5 + 104) \times 10}{2} = \frac{109 \times 10}{2} = \frac{1090}{2} = 545$$



30m

A soma dos 10 primeiros termos dessa progressão aritmética é **545**.

GABARITO

01. a

Este material foi elaborado pela equipe pedagógica do Gran Concursos, de acordo com a aula preparada e ministrada pelo professor Josimar Padilha.

A presente gravação tem como objetivo auxiliar no acompanhamento e na revisão do conteúdo ministrado na videoaula. Não recomendamos a substituição do estudo em vídeo pela leitura exclusiva deste material.
