

MATEMÁTICA

Números Inteiros



Presidente: Gabriel Granjeiro

Vice-Presidente: Rodrigo Calado

Diretor Pedagógico: Erico Teixeira

Diretora de Produção Educacional: Vivian Higashi

Gerente de Produção Digital: Bárbara Guerra

Todo o material desta apostila (incluindo textos e imagens) está protegido por direitos autorais do Gran. Será proibida toda forma de plágio, cópia, reprodução ou qualquer outra forma de uso, não autorizada expressamente, seja ela onerosa ou não, sujeitando-se o transgressor às penalidades previstas civil e criminalmente.

CÓDIGO:

250320081168



THIAGO CARDOSO

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.

GRAN
CONCURSOS

SUMÁRIO

Apresentação	4
Números Inteiros	5
1. Operações Fundamentais	5
1.1. Adição	5
1.2. Subtração	7
1.3. Multiplicação	8
1.4. Divisão	14
1.5. Múltiplos e Divisores	20
1.5. Potenciação	21
1.6. Radiciação	24
1.7. Expressões Numéricas	26
2. Números Inteiros	26
2.1. Números Naturais	27
2.2. Propriedades do Conjunto de Números Naturais	27
2.3. Números Inteiros	28
3. Números Primos	29
3.1. Como Reconhecer se um Número é Primo?	33
3.2. Decomposição em Fatores Primos	35
3.3. MMC e MDC	43
3.4. Produtos Notáveis	55
3.5. Teorema de Euclides	57
Resumo	59
Questões Comentadas em Aula	66
Exercícios	71
Gabarito	79
Gabarito Comentado	80

APRESENTAÇÃO

Olá, seja bem-vindo(a) a mais uma aula de Matemática. Nesta aula, vamos falar das Operações Fundamentais e de Conjuntos Numéricos.

Esse é um assunto que se pode considerar de Matemática Básica, ou seja, não precisa estar presente no edital para que seja cobrado. Qualquer prova pode cobrar adição, subtração, números primos etc.

Além disso, quando está presente no edital, é muito difícil aparecer uma questão de prova versando unicamente sobre um tema desta aula. Em vez disso, os conceitos serão úteis para resolver problemas de qualquer outra parte da Matemática.

A única exceção fica por conta dos números primos e do MMC e MDC. Esses assuntos são extremamente importantes e cobrados nas provas que cobram expressamente Conjuntos Numéricos no seu edital.

Por fim, eu gostaria de te lembrar que estou sempre disponível no Fórum de Dúvidas para sanar todas as suas dúvidas sobre a matéria.

Feitas essas orientações iniciais, vamos juntos explorar essa parte da matéria?

NÚMEROS INTEIROS

1. OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

Começaremos este estudo pelas operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Comentaremos aqui sobre as propriedades e os conceitos básicos a respeito dessas operações, com foco nas três últimas, que são as mais cheias de detalhes que podem ser úteis em estudos posteriores da matéria.

Gostaria de acrescentar que é pouco provável que uma questão de prova verse unicamente sobre esta parte da matéria. Em virtude de ser muito básico, este assunto costuma aparecer entrelaçado em questões envolvendo outros assuntos.

1.1. ADIÇÃO

A operação de adição comumente chamada de soma combina dois números, conhecidos como parcelas, termos ou somandos.

A adição é uma operação $a + b = c$ que satisfaz às seguintes propriedades:

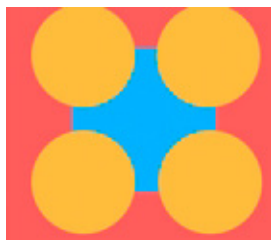
- **Comutativa:** a ordem das parcelas não altera a soma. Ex.: se $2 + 3 = 5$, então $3 + 2 = 5$.
- **Associativa:** o agrupamento das parcelas não altera o resultado. Ex.: se $(2 + 3) + 1 = 6$, então $2 + (3 + 1) = 6$.
- **Fechamento:** a adição de números pertencentes a um conjunto A deve ser um elemento pertencente ao mesmo conjunto A. Se estamos falando do conjunto de números naturais, a adição de dois números naturais deve ser também natural. Se estamos falando do conjunto de números reais, a adição de dois números reais deve ser também real.
- **Elemento neutro:** existe um elemento que, somado a qualquer número, resulta neste próprio número. No caso da adição convencional, o elemento neutro é o 0. Ex.: $2 + 0 = 0 + 2 = 2$; $3 + 0 = 0 + 3 = 3$.
- **Elemento oposto:** para cada número, existe um elemento que, quando somado a ele, produz o elemento neutro. Ex.: $2 + (-2) = 0$, portanto (-2) é o elemento oposto a 2; $3 + (-3) = 0$, portanto (-3) é o elemento oposto a 3.

ATENÇÃO

É possível que o problema defina outras formas para a operação de adição diferentes da adição convencional. No entanto, a operação de adição sempre deve satisfazer às cinco propriedades acima.

A operação de adição convencional não possui uma definição matemática precisa, mas, sim, deve ser entendida como um conceito intuitivo.

Por exemplo, suponha que você tem algumas bolas amarelas e que existam duas bolas em cima e duas bolas em baixo. Quantas bolas você tem no total?



O total corresponde à soma $2 + 2 = 4$. Isso pode ser verificado pela contagem das bolas acima.

Caso você esteja desacostumado(a), é interessante estudar o algoritmo da adição. Por exemplo, suponha que queiramos somar $37 + 79 + 125 = ?$

Para isso, devemos escrever os três números em uma coluna de cima para baixo (em qualquer ordem), mas com os algarismos das unidades ocupando a mesma coluna, os algarismos das dezenas ocupando a mesma coluna e assim por diante:

		3	7
		7	9
+	1	2	5
	Centenas	Dezenas	Unidades

A adição deve começar sempre pelos algarismos das unidades. Somamos todos eles e vemos que $7 + 9 + 5 = 21$. Na nossa soma, escrevemos 1 e o 2 é transferido para o algarismo das dezenas:

		+2	
		3	7
		7	9
+	1	2	5
			1

Continuamos o mesmo procedimento no algarismo das dezenas, lembrando-nos de que o 2 foi transferido para lá. Temos que $2 + 3 + 7 + 2 = 14$. Portanto, escrevemos 4 e o 1 é transferido para as centenas:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} +1 & +2 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & 3 & 7 \\ & 7 & 9 \\ + & 1 & 2 & 5 \\ \hline & 4 & 1 \end{array}
 \end{array}$$

Nas centenas, temos que $1 + 1 = 2$. Por isso, fechamos a soma:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} +1 & +2 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & 3 & 7 \\ & 7 & 9 \\ + & 1 & 2 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 1 \end{array}
 \end{array}$$

Concluimos que $37 + 79 + 125 = 241$.

1.2. SUBTRAÇÃO

Tecnicamente, a subtração não é uma operação básica, mas, sim, uma operação derivada da adição. A subtração $a - b$ consiste em somar a com o oposto de b .

EXEMPLO

$5 - 4 = 1$, porque $4 + 1 = 5$.

$73 - 29 = 44$, porque $29 + 44 = 73$.

$15 - 18 = -3$, porque $18 + (-3) = 15$.

Quando se tem uma soma de vários números misturados entre positivos e negativos, convém fazer o seguinte:

- some todos os números positivos e os negativos separadamente;
- subtraia os números negativos dos positivos.

EXEMPLO

$12 + 8 - 9 + 14 - 3 + 2 = ?$

Façamos a separação:

$$(12 + 8 + 14 + 2) - (9 + 3) = 36 - 12 = 24$$

O algoritmo da subtração é muito semelhante ao da adição, porém só deve ser utilizado para a subtração de dois números. Vejamos, por exemplo, a subtração $125 - 36$:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 5 \\ - \quad \quad 3 \quad 6 \\ \hline \end{array}$$

Devemos subtrair primeiramente os algarismos das unidades. Note que 5 é menor que 6. Por isso, o jeito mais fácil é pegar uma unidade emprestada do algarismo das dezenas. Assim, o algarismo das dezenas é diminuído para 1 e o algarismo das unidades passa a ser 15. Agora, fazemos $15 - 6 = 9$:

$$\begin{array}{r} -1 \\ 1 \quad 2 \quad 5 \\ - \quad \quad 3 \quad 6 \\ \hline \quad \quad 9 \end{array}$$

Mais uma vez, 2 é inferior à soma $3 + 1 = 4$. Por isso, tomamos emprestado o algarismo das dezenas. Agora, vemos que $12 - 3 - 1 = 12 - 4 = 8$:

$$\begin{array}{r} -1 \quad -1 \\ 1 \quad 2 \quad 5 \\ - \quad \quad 3 \quad 6 \\ \hline \quad 8 \quad 9 \end{array}$$

Portanto, o resultado da subtração desejada é 89.

1.3. MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação é uma operação binária que consiste em multiplicar dois termos. O resultado da multiplicação é conhecido como **produto**.

A multiplicação é uma operação $a.b = c$ que deve satisfazer às seguintes propriedades:

- **Associativa:** o agrupamento das parcelas não altera o resultado.

EXEMPLO

se $(2.3).4 = 24$, então $2.(3.4) = 24$.

- **Distributiva:** trata da importante relação entre soma e multiplicação. O produto:

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

- **Fechamento:** a adição de números pertencentes a um conjunto A deve ser um elemento pertencente ao mesmo conjunto A. Se estamos falando do conjunto de números naturais, a adição de dois números naturais deve ser também natural. Se estamos falando do conjunto de números reais, a adição de dois números reais deve ser também real.
- **Elemento neutro:** existe um elemento que, multiplicado a qualquer número, resulta neste próprio número. No caso da multiplicação convencional, o elemento neutro é o 1.

EXEMPLO

$$2.1 = 1.2 = 2; 3.1 = 3.$$

- **Elemento nulo:** existe um elemento x que, multiplicado a qualquer número, resulta sempre em x. No caso da multiplicação convencional, o elemento nulo é o 0.

EXEMPLO

$$2.0 = 0; 12.0 = 0.$$

Assim como dissemos para a adição, é possível que o problema defina uma operação de multiplicação diferente da convencional que nós estamos acostumados a usar no dia a dia. Mas, para isso, essa operação deve atender às seis propriedades delineadas acima.

A multiplicação convencional consiste em uma forma prática de adicionar várias vezes o mesmo número. Por exemplo:

$$2.3 = 3 + 3 \text{ (soma-se o 3 duas vezes);}$$

$$5.7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \text{ (soma-se o 7 cinco vezes).}$$

E assim por diante.

Um fato importante a se comentar é que a multiplicação convencional, além das cinco propriedades anteriores, também atende à propriedade comutativa:

- **Comutativa:** a ordem dos fatores não altera o produto.

EXEMPLO

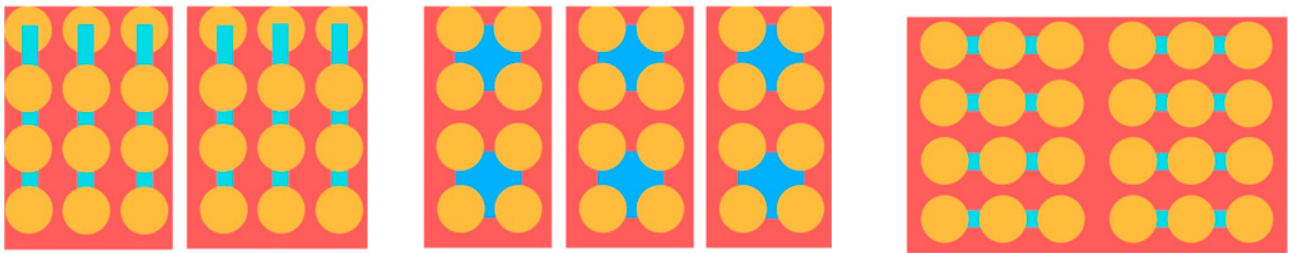
$$\text{se } 2.3 = 6, \text{ então } 3.2 = 6.$$

ATENÇÃO

Nem toda operação de multiplicação segue a propriedade comutativa. Um dos exemplos mais importantes é a multiplicação de matrizes

Podemos visualizar por meio do esquema a seguir que a multiplicação convencional atende às propriedades anteriores, inclusive a comutativa. Vejamos:

Figura 1 : Esquemas com 24 bolinhas exemplificando as propriedades da multiplicação



Na Figura 1, podemos ver que todas as três figuras são compostas por 24 bolinhas – basta contar.

Porém, na figura mais à esquerda, temos 2 grupos formados cada um por 4 grupos de 3 bolinhas. Ou seja, temos:

$$2.3.4 = 24$$

Na figura central, temos 3 grupos formados cada um por 2 grupos de 4 bolinhas. Isto é, temos:

$$3.2.4 = 24$$

Por fim, na figura à direita, temos 2 grupos formados cada um por 4 grupos de 3 bolinhas. Ou seja, temos:

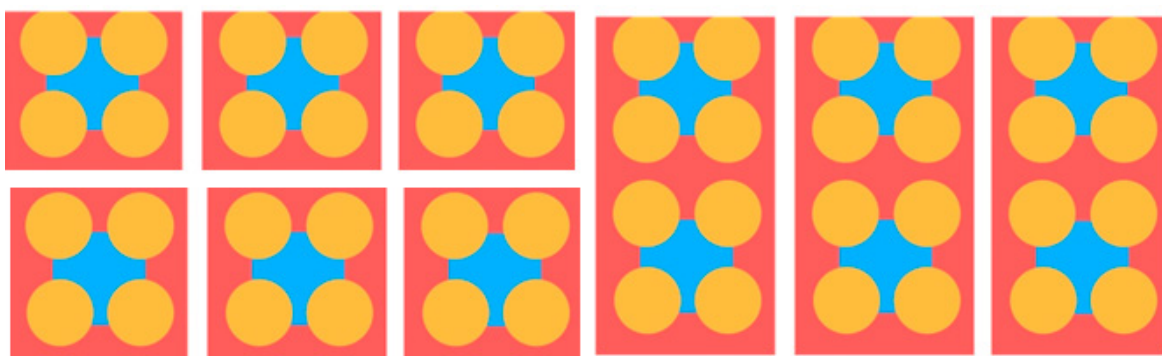
$$2.4.3 = 24$$

Com isso, mostramos a propriedade comutativa, isto é:

$$2.3.4 = 3.2.4 = 2.4.3 = 24$$

Também podemos visualizar a propriedade distributiva:

Figura 2: Ilustração da Propriedade Distributiva e Associativa



Na Figura 2, temos que o desenho à esquerda é composto por 3 grupos formados cada um por um grupo de 4 bolinhas mais outro grupo de 4 bolinhas. Ou seja:

$$3. (4 + 4) = 24$$

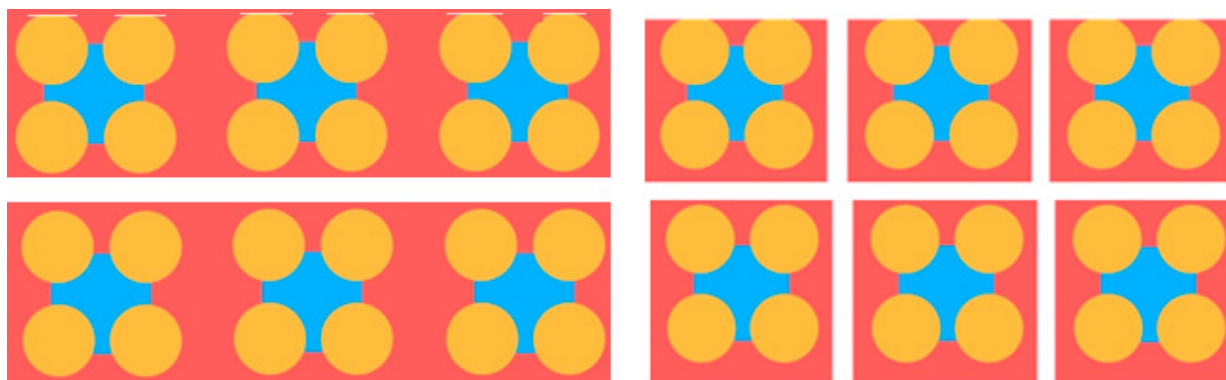
Já o desenho à direita é composto por 3 grupos formados cada um por um grupo de 8 bolinhas ($4 + 4 = 8$). Isto é:

$$3. (8) = 24$$

Por isso, concluímos que: $3. (4 + 4) = 3.8 = 24$

Por fim, podemos visualizar a propriedade distributiva. É só ver que outra forma de organizar as quatro bolinhas é formando 2 grupos cada um formado por 3 grupos de 4 bolinhas.

Figura 3: Ilustração da Propriedade Associativa



Dessa maneira, temos:

$$3.4 + 3.4 = 24$$

Assim, visualizamos que:

$$3. (4 + 4) = 3.4 + 3.4 = 24$$

Bom, minha intenção com esses gráficos era só fazer você visualizar que realmente existem essas famosas propriedades, conhecidas como comutativa, associativa e distributiva. Ok?

Agora, vamos falar brevemente sobre o algoritmo da multiplicação, que também é bastante semelhante ao da adição, mas é mais comumente utilizado para multiplicar dois elementos. Por exemplo, façamos o produto $26.34 = ?$

- **Primeiro passo:** organizamos os fatores da multiplicação, de modo que o algarismo das unidades fique abaixo dos algarismos das unidades, dezenas junto das dezenas e assim por diante.

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 34 \\ \hline \end{array}$$

- **Segundo passo:** façamos as multiplicações referentes ao algarismo das unidades do número embaixo. No caso, o 4. Façamos $4 \cdot 6 = 24$. Dessa forma, escrevemos o 4 e vai 2 para o algarismo das dezenas.

$$\begin{array}{r} +2 \\ 26 \\ \times 34 \\ \hline 4 \end{array}$$

Agora, façamos $4 \cdot 2 = 8$. Como já temos um 2 a ser somado, temos $8 + 2 = 10$. Dessa maneira, escrevemos o 0 nas dezenas e o 1 passa para o algarismo das centenas:

$$\begin{array}{r} +1 \\ 26 \\ \times 34 \\ \hline 104 \end{array}$$

Façamos o mesmo com o algarismo das dezenas do número 34, no caso, o 3. Só que, nesse caso, devemos nos lembrar de que, como o 3 está nas dezenas, o resultado da multiplicação deve ser anotado a partir desse algarismo.

No caso, $3 \cdot 6 = 18$, por isso escrevemos o 8 nas dezenas e o 1 passa para as centenas. Vejamos:

$$\begin{array}{r} +1 \\ 26 \\ \times 34 \\ \hline 104 \\ 8 \end{array}$$

1.4. DIVISÃO

A operação de divisão é a mais importante de todas e você precisará saber muito bem o algoritmo para entender o assunto de Raciocínio Sequencial.

A divisão é caracterizada por alguns elementos:

- **dividendo:** é o número que está sendo dividido por outro;
- **divisor:** é o número que divide o dividendo;
- **quociente:** é a parte inteira do resultado;
- **resto:** é o que sobra da divisão.

Vejamos o nosso velho conhecido algoritmo da divisão:

$$\begin{array}{r} 23 \quad | \quad 5 \end{array}$$

Nesse caso, temos que 23 é o dividendo, enquanto 5 é o divisor. Continuemos o algoritmo.

Qual é o maior número que, quando multiplicado por 5, não excede 23?

Vejamos. 5 vezes 4 é igual a 20, que é menor que 23. Ok. Porém, 5 vezes 5 é igual a 25, que já excede 23. Portanto, não podemos usar 5. Precisamos usar 4.

Como 5 vezes 4 é igual a 20, devemos subtrair esse número de 23. Temos o seguinte:

$$\begin{array}{r} 23 \quad | \quad 5 \\ -20 \quad | \quad 4 \\ \hline = (3) \end{array}$$

23 menos 20 é igual a 3. Não é possível dividir 3 por 5, porque 3 é menor que 5. Por isso, 3 será o **resto** da divisão.

A consequência mais importante do algoritmo da divisão é que se pode escrever que:

$$\text{Dividendo} = \text{Quociente} \cdot \text{Divisor} + \text{Resto}$$

No nosso exemplo, temos que:

$$23 = 4 \cdot 5 + 3$$

Agora, preste atenção à seguinte definição:

Obs.: Definição: um número (dividendo) é **divisível** por outro (divisor) quando o resto da divisão é igual a zero.

Já vimos que 23 não é divisível por 5, porque o resto da divisão é igual 3. Em outras palavras, 23 dividido por 5 é igual a 4 e deixa resto 3.

Por outro lado, 30 é divisível por 6. Vejamos:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 6 \\ -30 & 5 \\ \hline & 0 \end{array}$$

30 é divisível por 6, porque 30 dividido por 6 é igual a 5 e deixa resto 0.

É bem importante você entender o mecanismo da divisão para as questões de Raciocínio Sequencial.

Por isso, vamos a um exemplo prático.

EXEMPLO

Suponha que você tem 23 moedas que podem ser guardadas em cofres que cabem apenas 5. Como 23 dividido por 5 é igual a 4 e deixa resto 3, isso significa que:

- a) você poderá encher 4 cofres – totalizando 20 moedas;
- b) sobrarão 3 moedas.

Dessa maneira, podemos dizer que as 23 moedas são suficientes para encher 4 cofres (o quociente da divisão) e ainda restarão 3 moedas.

Agora, prestemos atenção que isso pode ser cobrado de duas formas em questões de provas.

Qual o número mínimo de cofres necessários para guardar as 23 moedas?

Qual o número máximo de cofres que podem ser enchidos com as 23 moedas?

Perceba que as duas respostas são diferentes.

Precisamos de, pelo menos, 5 cofres para guardar as 23 moedas – 4 ficarão cheios e um deles ficará com apenas 3 moedas.

Por outro lado, o número máximo de cofres que podemos encher é igual a 4 – o quociente da divisão.

1.4.1. RESTO DA DIVISÃO

Nesta seção, faremos a seguinte notação para o resto da divisão de b por a.

$$r_a(b)$$

Dessa maneira, temos:

$r_3(10) = 1$, porque 10 dividido por 3 é igual a 3 e deixa resto 1;

$r_4(15) = 3$, porque 15 dividido por 4 é igual a 3 e deixa resto 3;

$r_7(9) = 2$, porque 9 dividido por 7 é igual a 1 e deixa resto 2.

Dessa forma, dizemos que b é divisível por a quando $r_a(b) = 0$. Em outras palavras, b é divisível por a quando o resto da divisão é igual a 0, como já foi definido na seção anterior.

Podemos anotar algumas propriedades do resto da divisão. Vejamos:

Resto da soma: é igual ao resto da soma dos restos.

$$r_a(b + c) = r_a[r_a(b) + r_a(c)]$$

Pode parecer estranha essa propriedade, mas é bem útil. Vejamos:

Qual o resto da divisão de $98 + 309$ na divisão por 3? Em vez de fazer uma soma e obter números complicados, podemos notar o seguinte:

96 é divisível por 3, porque a soma $9 + 6 = 15$. Portanto, $r_3(96) = 0$. Agora, podemos escrever que:

$$r_3(98) = r_3(96 + 2) = 0 + 2 = 2$$

Por outro lado, 309 é divisível por 3, porque a soma $3 + 0 + 9 = 12$. Assim, temos que:

$$r_3(98 + 309) = r_3(98) + r_3(309) = 2 + 0 = 2$$

Olha só, não precisamos fazer nenhuma divisão para obter o resto. Entendeu como essa propriedade é muito útil?

Resto do produto: é igual ao resto do produto dos restos.

$$r_a(bc) = r_a[r_a(b).r_a(c)]$$

Na minha visão, essa é a propriedade mais útil do resto da divisão. Por exemplo, qual o resto da divisão de 98.310 por 3?

Convenhamos que fazer a conta 98.310 e depois dividir por 3 em uma prova de concurso público é algo bem fora de questão, não acha?

Porém, podemos fazer o seguinte:

$r_3(98) = 2$, porque 96 é divisível por 3 e $98 = 96 + 2$.

$r_3(310) = 1$, porque 309 é divisível por 3 e $310 = 309 + 1$.

Logo, temos que o resto do produto é:

$$r_3(98.310) = 2.1 = 2$$

Bem melhor do que fazer um monte de contas de multiplicação. Multiplicar 98×310 tomaria bastante tempo, não acha?

DIRETO DO CONCURSO

001. (FGV/PREFEITURA DE CUIABÁ-MT/TÉCNICO EM ADMINISTRAÇÃO ESCOLAR/2015) Rogério cria galinhas para a produção de ovos e, certo dia, ele coletou 165 ovos. Arrumando esses ovos em caixas de uma dúzia, o número máximo de caixas completas que ele conseguiu foi:

- a) 12
- b) 13
- c) 14
- d) 15
- e) 16



Uma rara questão que foi bem direta no conceito de divisão. Aproveitemos para treinar e eliminar quaisquer eventuais dúvidas sobre o assunto.

$$\begin{array}{r|l} 165 & 12 \\ -12 & 13 \\ \hline 45 & \\ -36 & \\ \hline (9) & \end{array}$$

Portanto, os 165 ovos são suficientes para encher 13 caixas e ainda restam 9 que ficarão em uma caixa que não ficará completa. Desse modo, serão necessárias 14 caixas.

Letra b.

1.4.2. REGRAS DE DIVISIBILIDADE

É muito interessante você reconhecer rapidamente se um número é divisível por outros. Isso é extremamente importante para facilitar a simplificação de frações.

Vejamos as regras mais comuns. Um número é divisível:

- **Por 2:** quando **é par**, ou seja, termina em 2, 4, 6, 8 ou 0.

EXEMPLO

18, 1096 e 230 são divisíveis por 2; já 13, 17 e 69 não são divisíveis por 2.

- **Por 3:** quando a soma dos seus algarismos é um número divisível por 3.

EXEMPLO

198 ($1 + 9 + 8 = 18$) é divisível por 3, porque 18 é divisível por 3;
 264 é divisível por 3, porque $2 + 6 + 4 = 12$, que é divisível por 3;
 390 é divisível por 3, porque $3 + 9 + 0 = 12$, que é divisível por 3;
 221 não é divisível por 3, porque $2 + 2 + 1 = 5$, que não é divisível por 3.

- **Por 4:** quando os seus dois últimos algarismos formam um número que é divisível por 4.

EXEMPLO

200 é divisível por 4, porque 00 é divisível por 4;
 3048 é divisível por 4, porque 48 é divisível por 4;
 2094 não é divisível por 4, porque 94 não é divisível por 4 (faça o teste – 94 dividido por 4 é igual a 23 e deixa resto 2).

- **Por 5:** quando termina em 0 ou 5.

EXEMPLO

200 é divisível por 5, porque termina em 0;
 305 é divisível por 5, porque termina em 5;
 12 não é divisível por 5, porque não termina em 0 nem em 5.

- **Por 9:** quando a soma dos seus algarismos é um número divisível por 9.

EXEMPLO

198 é divisível por 9, porque $1 + 9 + 8 = 18$, que é divisível por 9;
 333 é divisível por 9, porque $3 + 3 + 3 = 9$, que é divisível por 9;
 204 não é divisível por 9, porque $2 + 0 + 4 = 6$, que não é divisível por 9.

- **Por 10:** quando termina em 0.

EXEMPLO

500 é divisível por 10, porque termina em 0;
 95 não é divisível por 10, porque não termina em 0.

Existem também regras de divisibilidade por 7 e por 11. Porém, elas são tão complicadas que é preferível fazer a conta mesmo.

DIRETO DO CONCURSO

002. (Q3663117/INSTITUTO AVANÇA-SP/CÂMARA DE ITUPEVA/AGENTE LEGISLATIVO/2025)

Qual dos seguintes números é um divisor de 84?

- a) 10
- b) 7
- c) 9
- d) 13
- e) 15



Vamos fatorar o número, lembrando que os primeiros números primos são {2, 3, 5 e 7}. Podemos ver que 84 é par, portanto, é divisível por 2. O resultado da divisão é 42, que também é par, logo, é divisível por 2 também. O resultado da divisão é 21.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & \end{array}$$

21 não é par, mas é divisível por 3, porque a soma dos algarismos é igual a $2 + 1 = 3$. O resultado de 21 dividido por 3 é igual a 7. Por fim, 7 é primo, então, a fatoração acaba nele.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \hline & = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \end{array}$$

Com base na fatoração vamos analisar os candidatos a divisor de 84.

- a) Errada. 10 é divisível por 5, portanto, não pode ser divisor de 84.
- b) Certa. 7 é um dos fatores primos de 84, portanto, é sim um divisor.
- c) Errada. 9 é divisível por 3^2 , enquanto 84 é divisível apenas por 3^1 . Portanto, 9 não é divisor de 84.

d) Errada. 13 é um número primo e não é um dos fatores de 84. Portanto, 13 não é divisor de 84.

e) Errada. 15 é divisível por 5, portanto, não pode ser divisor de 84.

Letra b.

003. (IBFC/POLÍCIA CIENTÍFICA-PR/PERITO CRIMINAL-ÁREA 8/2017) Dentre os números descritos nas alternativas, o único que não é divisível por 9 é:

- a) 1359
- b) 21744
- c) 8766
- d) 123456
- e) 23130



Para saber se um número é divisível por 9, devemos pegar a soma dos seus algarismos.

1359: $1 + 3 + 5 + 9 = 18$ é divisível por 9.

21744: $2 + 1 + 7 + 4 + 4 = 18$ é divisível por 9.

8766: $8 + 7 + 6 + 6 = 27$ é divisível por 9.

123456: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ não é divisível por 9.

23130: $2 + 3 + 1 + 3 + 0 = 9$ é divisível por 9.

Letra d.

1.4.3. DIVISÃO POR ZERO

É importante destacar que não é possível dividir por zero, ou seja, nunca teremos 0 como divisor.

Isso acontece porque o produto de 0 por qualquer número é igual a 0. Sendo assim, não é possível obter um quociente.

Portanto, memorize que **não é possível dividir por zero.**

1.5. MÚLTIPLOS E DIVISORES

Um número A é múltiplo de B quando a divisão A por B é exata, isto é, não deixa resto. Em contrapartida, diz-se que B é divisor de A.

Por exemplo, na divisão de 72 por 4, temos:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 4 \\ -72 & 18 \\ \hline & (0) \end{array}$$

Como 72 dividido por 4 é igual a 18 e deixa resto 0, podemos dizer que:

- 72 é múltiplo de 4; e
- 4 é divisor de 72.

Desse modo, podemos dizer que os múltiplos de 4 seriam:

$$M = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$$

1.5.1. MÚLTIPLO MAIOR OU MENOR QUE UM DETERMINADO NÚMERO

Um problema muito comum em questões de prova consiste em determinar, por exemplo, qual o maior múltiplo de 7 que é inferior a 600.

Para determinar isso, podemos recorrer ao algoritmo da divisão. Vamos obter o quociente, e o múltiplo pesquisado é exatamente igual ao produto do quociente pelo divisor.

$$\begin{array}{r|l} 600 & 7 \\ -595 & 85 \\ \hline & (5) \end{array}$$

600 dividido por 7 é igual a 85 e deixa resto 5. Desse modo, o maior múltiplo de 7 que não excede 600 é igual a 595. Observe que esse termo aparece exatamente no algoritmo da divisão.

Por outro lado, poderia ser perguntado também qual o menor múltiplo de 7 que é superior a 600?

Para isso, bastaria somar 7 ao termo obtido acima:

$$M = 595 + 7 = 602$$

Assim, o primeiro múltiplo de 7 que é superior a 600 é igual a 602. Outra forma de obtê-lo seria acrescentando 1 ao quociente:

$$M = (85 + 1) \cdot 7 = 86 \cdot 7 = 602$$

1.5. POTENCIAÇÃO

A potenciação a^b é uma operação que apresenta os seguintes termos:

- **base:** é o número a ;
- **expoente:** é o b .

A potenciação consiste em multiplicar a base “a” por ela própria “b” vezes. Vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO

$3^4 = 3.3.3.3 = 81$ (3 multiplicado por ele próprio 4 vezes).

$5^3 = 5.5.5 = 125$ (5 multiplicado por ele próprio 3 vezes).

$2^8 = 2.2.2.2.2.2.2.2 = 256$ (2 multiplicado por ele próprio 8 vezes).

A potenciação apresenta algumas propriedades importantes:

- **Produto de potências de mesma base:** conserva-se a base e somam-se os expoentes;

EXEMPLO

$$2^{5+3} = 2^5 \cdot 2^3 = (2.2.2.2.2) \cdot (2.2.2) = 32 \cdot 8 = 256$$

– de fato, já vimos que $2^{5+3} = 2^8$.

- **Divisão de potências de mesma base:** conserva-se a base e subtraem-se os expoentes;

EXEMPLO

$$2^{5-3} = 2^5 / 2^3 = (2.2.2.2.2) / (2.2.2) = 32 / 8 = 4$$

– de fato, $2^{5-3} = 2^2 = 4$

- **Produto (ou divisão) de potências de mesmo expoente:** conserva-se o índice e multiplicam-se (ou dividem-se) as bases. Vejamos:

EXEMPLO

$$\frac{18^3}{9^3} = \left(\frac{18}{9}\right)^3 = 2^3 = 8 \quad \text{– facilitou bastante a conta, não?}$$

- **Potência de potência:** conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes;

EXEMPLO

$$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64 \quad \text{– de fato, } 2^3 = 8 \text{ e } 8^2 = 64.$$

É muito comum, principalmente em informática, a notação da potência com uma seta. Essa notação é conhecida como notação de setas de Knuth. Quando não é possível escrever uma seta, utiliza-se, ainda, o circunflexo ^.

$$3 \uparrow 2 = 3 \wedge 2 = 3^2 = 3.3 = 9$$

$$4 \uparrow 3 = 4 \wedge 3 = 4^3 = 4.4.4 = 64$$

1.5.1. POTÊNCIAS DE NÚMEROS NEGATIVOS

Precisamos ter cuidado com potências de números negativos.

Devemos usar o princípio de que $(-)$ multiplicado por $(-)$ dará sinal $(+)$.

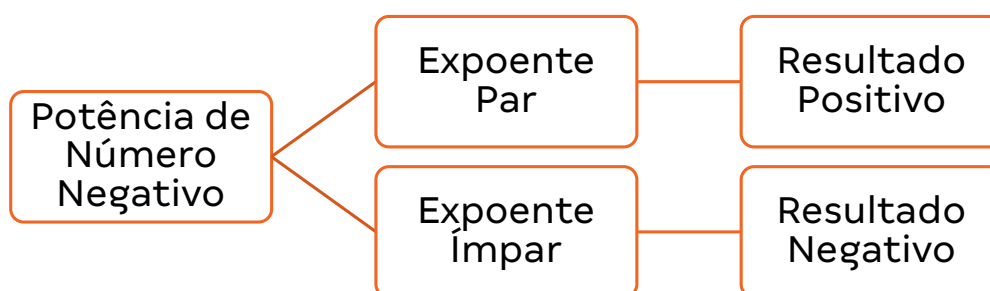
Dessa maneira, sempre que temos uma potência par de um número negativo, o resultado será positivo. Vejamos:

$$(-2)^4 = +(2)^4 = 16$$

Por outro lado, quando a potência for ímpar, o resultado será negativo. Como temos três sinais negativos, teremos $(-).(-).(-) = (+).(-) = (-)$.

$$(-3)^3 = (-3).(-3).(-3) = -(3)^3 = -27$$

Sendo assim, lembre-se:



1.5.2. TORRES DE POTÊNCIA

Embora não sejam muito comuns em questões de prova, é importante deixar claro que **a potenciação não segue a propriedade comutativa.**

Em outras palavras, em geral, $a^b \neq b^a$. Um dos raros casos que eu conheço de comutatividade nas potências é $2^4 = 4^2 = 16$. Falando nisso, tenho, inclusive, um grande amigo.

Jamais me esqueci de sua data de aniversário porque ele nasceu no dia 16/02 – olha só, e 16 é exatamente o único número que eu conheço que é o resultado de uma potenciação comutativa que tem justamente base 2.

Porém, a regra geral é que a potenciação não comute. Por conta disso, é possível que apareçam as chamadas torres de potência que podem ser representadas pela notação de Knuth com duas setas para cima.

Quando temos $2 \uparrow\uparrow 3$, temos uma torre de potências de 2 elevado a 2 elevado a 2 três vezes.

Vejamos alguns exemplos de torres de potência:

EXEMPLO

$$2 \uparrow\uparrow 3 = 2 \uparrow 2 \uparrow 2 = 2^{2^2} = 2^4 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow 2 \uparrow 2 \uparrow 2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65.536$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7.625.597.484.987$$

Perceba que as torres de potência crescem muito rapidamente. Mesmo com números bem pequenos, nós chegamos a resultados extremamente elevados.

É importante que você note a diferença entre uma torre de potências e uma potência de potência. Vejamos:

$$(2^2)^2 = 2^{2 \cdot 2} = 2^4 = 16$$

$$((2^2)^2)^2 = 2^{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^8 = 256$$

$$(3^3)^3 = 3^{3 \cdot 3} = 3^9 = 19.683$$

1.6. RADICIAÇÃO

Corresponde à operação inversa da potenciação. Vejamos:

$$\sqrt[3]{64} = 4, \text{ porque } 4^3 = 64.$$

$$\sqrt[5]{32} = 2, \text{ porque } 2^5 = 32.$$

$$\sqrt[3]{125} = 5, \text{ porque } 5^3 = 125.$$

Quando o expoente do radical não está expresso, subentende-se que é igual a 2 – a famosa raiz quadrada. Observe:

$$\sqrt{36} = 6, \text{ porque } 6^2 = 36.$$

A exemplo da potência, a radiciação tem algumas propriedades. Vejamos:

- **Conversão de radiciação em potência:** a radiciação corresponde a uma potência em que o expoente é o inverso do índice.

EXEMPLO

$$\sqrt[3]{64} = 64^{1/3}$$

$$\sqrt{36} = 36^{1/2}$$

- **Produto de raízes de mesmo índice:** é possível conservar os índices e multiplicar (ou dividir) os radicandos. Observe:

EXEMPLO

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{250} \sqrt{10} = \sqrt{250 \cdot 10} = \sqrt{2500} = 50$$

- **Radiciação de potência:** sempre que temos uma raiz de potência, podemos dividir o expoente pelo índice.

EXEMPLOS

$$\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^{3 \cdot 2}} = 2^{\frac{3 \cdot 2}{3}} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{5^{3 \cdot 2}} = 5^{\frac{3 \cdot 2}{3}} = 5^2 = 25$$

1.6.1. RADICIAÇÃO EM NÚMEROS NEGATIVOS

A radiciação somente se aplica para números negativos quando o índice for ímpar.

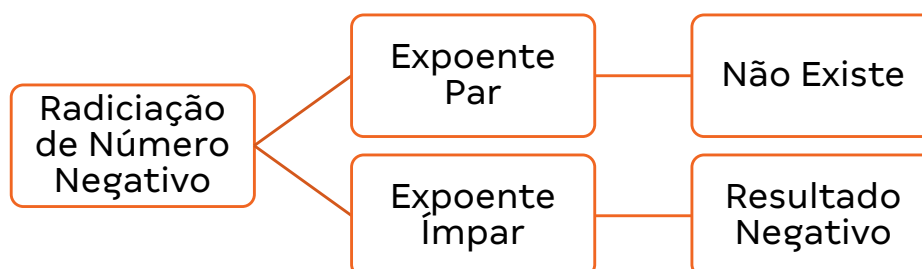
A raiz quadrada – índice par – de um número negativo não será um número real, porque o quadrado de qualquer número real será positivo.

$$\sqrt{-4} \text{ não é real}$$

Por outro lado, podemos falar em uma raiz cúbica – índice ímpar.

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \leftrightarrow (-2)^3 = -8$$

A raiz cúbica de -8 é igual a -2, porque $(-2)^3 = -8$. Não há problemas nisso.



1.7. EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Torço para que um dia este assunto seja eliminado da Matemática. Até hoje, eu não conheço nada que faça as pessoas mais errarem contas.

As expressões numéricas são da forma:

$$2 + 3. \{1 + 4. [3 + 2. (1 + 3)^2 + 4. (3 - 2)^3]\}$$

As questões especificamente de expressões numéricas são muito simples, porém você precisa tomar muito cuidado quando uma expressão desse tipo aparecer no meio da resolução de uma questão de outro assunto. Tudo bem?

Por hora, tudo o que você precisa saber é que há uma ordem para fazer as contas:

- parênteses;
- colchetes;
- chaves;
- potências e radicais;
- multiplicações e divisões;
- somas e subtrações.

Vejamos a expressão que fornecemos no exemplo. Começemos pelos parênteses:

$$\begin{aligned} 2 + 3. \{1 + 4. [3 + 2. (1 + 3)^2 + 4. (3 - 2)^3]\} &= \\ 2 + 3. \{1 + 4. [3 + 2. (4)^2 + 4. (1)^3]\} &= \\ 2 + 3. \{1 + 4. [3 + 2.16 + 4.1]\} &= \end{aligned}$$

Veja que, dentro dos colchetes, há operações de multiplicação e soma. Precisamos fazer primeiro a operação de multiplicação:

$$2 + 3. \{1 + 4. [3 + 32 + 4]\} =$$

Agora, façamos a soma dentro dos colchetes:

$$\begin{aligned} 2 + 3. \{1 + 4. [39]\} &= \\ 2 + 3. \{1 + 156\} &= \\ 2 + 3.157 &= 2 + 471 = 473 \end{aligned}$$

É só tomar cuidado que você não vai se perder.

2. NÚMEROS INTEIROS

O conjunto de números inteiros é um dos mais importantes. Antes de começarmos a nos aprofundar sobre ele, devemos estudar os números naturais.

2.1. NÚMEROS NATURAIS

São os números utilizados para **contar**.

Essa é a principal dica para você entender quem são eles. Pense que você vai contar o número de alunos em uma sala de aula.

Você pode contar 1 aluno, 2 alunos, 3 alunos, 4 alunos. Mas não pode contar 4,5 alunos – não existe metade de um aluno, certo?

Por isso, o conjunto de números naturais é formado pelos números:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Obs.: Existe uma séria discussão na Matemática se o número 0 pertence ou não ao conjunto de números naturais. Eu me alinho com a corrente que defende que 0 não é um número natural, porque não se pode contar com ele. Porém, eu acho muito difícil que uma questão de prova exija algum tipo de posicionamento de sua parte quanto a essa discussão.

Matematicamente, a definição de números naturais é bastante sofisticada. Porém, aqui, contaremos com o seu bom senso para saber o que é um número natural e o que não é.

Basicamente, são os números que não possuem nenhuma casa depois da vírgula.

Tabela 1: Números Naturais e Números Não Naturais

São Números Naturais	Não São Números Naturais
3	3,2
1.098	1,098
1.048.753	1.048,753

2.2. PROPRIEDADES DO CONJUNTO DE NÚMEROS NATURAIS

O conjunto de números naturais é bem definido em relação às operações de adição e multiplicação. Ou seja, a soma de dois números naturais é sempre um número natural e o produto de dois números naturais é sempre natural.

Em Matemática, costuma-se dizer que o Conjunto dos Números Naturais **é fechado quanto à adição e quanto à multiplicação**.

Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{array}{ccc} 1 & + 1 & = 2 \\ \text{Natural} & \text{Natural} & \text{Natural} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 37 & + 24 & = 61 \\ \text{Natural} & \text{Natural} & \text{Natural} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 12 & \cdot 3 & = 36 \\ \text{Natural} & \text{Natural} & \text{Natural} \end{array}$$

Porém, o mesmo não se pode dizer em relação às operações de subtração e divisão.

A subtração de dois números naturais “ $a - b$ ” só será outro natural quando a for maior que b . Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{array}{ccc} 2 & - 1 & = 1 \\ \text{Natural} & \text{Natural} & \text{Natural} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 24 & - 37 & = -13 \\ \text{Natural} & \text{Natural} & \text{Não é natural} \end{array}$$

2.3. NÚMEROS INTEIROS

O conjunto dos números inteiros é mais amplo do que o conjunto dos números naturais, incluindo também o zero e os números negativos.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Alguns subconjuntos importantes dos números inteiros são:

- **Inteiros positivos:** são os inteiros maiores que zero;

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Convém destacar que zero não possui sinal, portanto não pode ser enquadrado como um número positivo ou negativo.

Na notação, o $*$ significa que excluimos o zero do conjunto de números inteiros.

- **Inteiros não negativos:** são os inteiros maiores ou iguais a zero;

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Não confunda. A notação $\mathbb{Z}_+$ inclui o $\{0\}$, por isso não podemos chamar esse conjunto de *inteiros positivos*.

Acredito que muito dificilmente uma questão de prova te trará uma pegadinha desse gênero, mas saiba que $\mathbb{Z}_+$ se refere aos *inteiros não negativos*, o que é diferente de *inteiros positivos*.

- **Inteiros negativos:** são os inteiros menores que zero;

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

- **Inteiros não positivos:** são os inteiros menores ou iguais a zero;

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

Mais uma vez, tome cuidado com a confusão: $\mathbb{Z}_-$ se refere aos *inteiros não positivos*, portanto inclui o zero. Quando queremos excluir o $\{0\}$ do nosso conjunto, devemos ser explícitos e assinalar o asterisco.

- **Inteiros não nulos:** exclui o zero, representado por um asterisco;

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

3. NÚMEROS PRIMOS

Um número é primo quando só é divisível por 1 e por ele próprio.

Como exemplo, temos o número 2. 2 é divisível apenas por 1 e por 2.

É muito importante memorizar os primeiros números primos, pois eles são muito úteis para a simplificação de frações. Mais adiante, veremos como isso funcionará.

Mas, por hora, vamos aprender um algoritmo bem simplificado para obter todos os números primos até 100. Esse procedimento já foi cobrado em prova, por isso estamos mostrando neste material.

Para isso, sigamos alguns passos:

- Escreva todos os números de 1 a 100 na forma de uma tabela 10x10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Corte o 1 e circule o 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Corte todos os números da tabela de 2 em 2.

Ou seja, $2 + 2 = 4$ (corte o 4), $4 + 2 = 6$ (corte o 6). E assim por diante.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Circule o próximo elemento que não foi cortado. No caso, o 3. E corte todos os elementos de 3 em 3.

Nesse caso, $3 + 3 = 6$ (já foi cortado). Então, $6 + 3 = 9$ (corte o 9). E assim por diante.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Repita o procedimento. Isto é, circule o próximo elemento que não foi cortado. No caso, o 5. E corte todos os elementos de 5 em 5.

Nesse caso, $5 + 5 = 10$ (já foi cortado). Então, $10 + 5 = 15$ (já foi cortado). $15 + 5 = 20$ (já foi cortado). $20 + 5 = 25$ (corte o 25). E assim por diante.

Fique tranquilo(a). Esse procedimento só precisa ser feito com os números da primeira linha.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Repita o procedimento. Ou seja, circule o próximo elemento que não foi cortado. No caso, o 7. E corte todos os elementos de 7 em 7.

Perceba que fica mais difícil cortar.

$7 + 7 = 14$ (já cortado)

$14 + 7 = 21$ (já cortado)

$21 + 7 = 28$ (já cortado)

$28 + 7 = 35$ (já cortado)

$35 + 7 = 42$ (já cortado)

$42 + 7 = 49$ (corte o 49)
 $49 + 7 = 56$ (já cortado)
 $56 + 7 = 63$ (já cortado)
 $63 + 7 = 70$ (já cortado)
 $70 + 7 = 77$ (corte o 77, ufa!)
 $77 + 7 = 84$ (já cortado)
 $84 + 7 = 91$ (corte o 91)
 $91 + 7 = 98$ (já cortado)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Agora, todos os números que ainda não foram cortados são primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Portanto, anotemos todos os números primos até 100:

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$

3.1. COMO RECONHECER SE UM NÚMERO É PRIMO?

É possível que uma questão nos pergunte se determinado número é primo ou não. Para isso, devemos nos recordar da definição do que é um número primo.

DEFINIÇÃO: Um número é primo quando é divisível apenas pela unidade e por ele próprio.

Desse modo, uma maneira simples de saber se um número qualquer é primo é testando os números primos anteriores a ele.

Além disso, não precisamos testar um grande número de primos – podemos parar na raiz quadrada daquele número.

EXEMPLO

167 é primo?

Vejamos. $13^2 = 169 > 167$. Por isso, só precisamos testar os primos até 13.

Agora, só precisamos testar os primos até 13. No caso, 2, 3, 5, 7 e 11.

167 não é divisível por 2, porque não é par.

Não é divisível por 3, porque a soma $1 + 6 + 7 = 14$, que não é divisível por 3.

Não é divisível por 5, porque não termina nem em 0 nem em 5.

Não é divisível por 7. Bom, nesse caso, precisamos fazer a conta:

16'7	7		16'7	7
-14	2		-14	23
2		Desce o 7	27	
			-21	
			(6)	

Olha só, 167 dividido por 7 é igual a 23 e deixa resto 6. Como existe resto, 167 não é divisível por 7.

Por fim, tentemos dividir 167 por 11:

16'7	11		16'7	7
-11	1		-11	15
5		Desce o 7	57	
			-55	
			(2)	

Olha só, 167 dividido por 11 é igual a 15 e deixa resto 2.

Como 167 não é divisível por nenhum dos primos anteriores, temos que 167 é também um número primo.

DIRETO DO CONCURSO

004. (FGV/SEE-PE/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) O número de três algarismos: $n = 68D$ é primo.

O algarismo D, das unidades, é:

- a) 1
- b) 3
- c) 5
- d) 7
- e) 9



Uma boa quantidade de alternativas pode ser eliminada pelo uso de simples regras de divisibilidade.

Vejamos: o algarismo das unidades não poderia ser par, porque, nesse caso, o número seria divisível por 2.

Não pode ser 5, porque, nesse caso, o número seria divisível por 5.

Além disso, também não poderia ser 1 nem 7, pois tanto 681 ($6 + 8 + 1 = 15$) como 687 ($1 + 8 + 7 = 16$) são divisíveis por 3.

Resta-nos, portanto, testar os números 683 e 689.

A raiz quadrada de 689 é inferior a 27, pois $27^2 = 729 > 689$. Assim, só precisamos testar os primos até 27, no caso, 23 é o maior primo. Lembremos os primos até 23: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}.

Já vimos que nem 683 nem 689 são divisíveis por 2, por 3 nem por 5.

Tentemos por 7. Nenhum dos números é divisível por 7.

Tentemos por 11. Nenhum dos números é divisível por 11.

Tentemos por 13. Opa! 689 dividido por 13 é igual a 53.

Sendo assim, 689 não é primo. Resta-nos, portanto, marcar 683.

Podemos continuar as divisões por 17, 19 e 23 para descobrir que realmente 683 é primo, pois não é divisível por nenhum desses números primos.

Letra b.

3.2. DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS

A grande utilidade do conceito de números primos é que **qualquer número natural pode ser decomposto em fatores primos**, ou seja, um número qualquer N pode ser decomposto da seguinte forma:

$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

Os termos $p_1, p_2, \dots, p_k$ são os chamados **fatores primos**. Isto é, são os números primos que dividem (ou fatoram) n.

Esse procedimento é chamado de **fatoração**.

A seguir, apresentaremos o procedimento para determinar a fatoração de um número N qualquer.

Para isso, precisamos saber, pelo menos, os primeiros números primos. Repetiremos os primos até 100:

$$\left\{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \right. \\ \left. 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 \right\}$$

Por exemplo, vamos fatorar o número 360.

- Tente dividir 360 pelo primeiro primo (no caso, 2). Faça a divisão por 2 enquanto for possível e vá anotando o número 2 na coluna à direita sempre que for dividindo. Vejamos:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & \end{array}$$

Como 180 é divisível por 2, continue o procedimento:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & \end{array}$$

Como 90 é divisível por 2, continue dividindo por 2:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & \end{array}$$

Agora, 45 não é divisível por 2, por isso vamos ao próximo passo:

- Divida pelo próximo primo. Faça isso sucessivamente até chegar a 1. Vejamos:

45 é divisível por 3 (dá 15). 15 é divisível por 3 e resulta em 5. 5 é primo, então só pode ser divisível por 5:

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

- Anote os números da coluna à direita. Os expoentes correspondem ao número de vezes que o primo apareceu na fatoração. Vejamos:

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	$=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Dessa maneira, chegamos à fatoração do número 360:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Essa fatoração é importantíssima para obter o MMC e o MDC, que são, certamente, o assunto mais importante e cobrado desta parte da matéria.

3.2.1. CONJUNTO DE DIVISORES

Um divisor de um número é aquele que o divide sem deixar resto. Por exemplo, 4 é divisor de 72, porque, ao usar o algoritmo da divisão, teremos que 72 dividido por 4 é igual a 18 e deixa resto zero. Observe:

72	4
-72	18
(0)	

Uma questão muito comum em provas consiste em saber quantos divisores possui um determinado número. Para isso, podemos utilizar a sua própria fatoração. Considere, por exemplo, o caso do 72:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	$=2^3 \cdot 3^2$

A forma mais simples de obter os divisores de 72 é montando uma tabela com todas as potências de 2 e de 3, que são seus fatores primos, menores ou iguais aos coeficientes obtidos na fatoração.

Tabela 2: Como obter os divisores de um número inteiro

	$3^0 = 1$	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$
$2^0 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 3 = 3$	$1 \cdot 9 = 9$
$2^1 = 2$	$2 \cdot 1 = 2$	$2 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 9 = 18$
$2^2 = 4$	$4 \cdot 1 = 4$	$4 \cdot 3 = 12$	$4 \cdot 9 = 36$
$2^3 = 8$	$8 \cdot 1 = 8$	$8 \cdot 3 = 24$	$8 \cdot 9 = 72$

Desse modo, o conjunto de divisores de 72 é:

$$D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

3.2.2. QUANTIDADE DE DIVISORES DE UM NÚMERO

Um tipo de questão muito comum pede para você obter a quantidade de divisores de um número. A forma mais simples de calcular é também usando a fatoração.

Se a fatoração de um número qualquer for:

$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

A quantidade de divisores é obtida como o produto dos expoentes acrescidos de 1. Matematicamente, podemos escrever:

$$\#divisores = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1)$$

Ficará mais fácil vendo um exemplo. Já vimos a fatoração de 72:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	$= 2^3 \cdot 3^2$

Então, como os expoentes obtidos são 3 e 2, o número de divisores será:

$$\#D_{72} = (3 + 1) \cdot (2 + 1) = 4 \cdot 3 = 12$$

Portanto, o número 72 tem 12 divisores. E nós já havíamos contado todos eles anteriormente, lembra-se?

$$D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

Concluimos, então, que nossa fórmula funcionou bem. Vamos ver como ela poderia ser aplicada para um número mais complicado. Por exemplo, qual o número de divisores de 2940?

Para saber isso, devemos fatorá-lo:

2940	2
1470	2
735	3
245	5
49	7
7	7
1	$= 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2$

Então, basta multiplicar os expoentes acrescidos de uma unidade:

$$\#divisores = (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36$$

Portanto, o 2940 tem 36 divisores.

DIRETO DO CONCURSO 

005. (FCC/PREFEITURA DE RECIFE-PE/ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA/2019 O número de divisores inteiros positivos de 600 é

- a) 25.
- b) 23.
- c) 22.
- d) 21.
- e) 24.



Para saber o número de divisores inteiros de 600, devemos recorrer à fatoração desse número:

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	$= 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

O número de divisores é dado pelo produto dos expoentes acrescidos de uma unidade.

$$N = (3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Errado.

3.2.3. DIVISORES PRÓPRIOS

O conjunto de divisores próprios de um número qualquer corresponde a todos os seus divisores, exceto ele próprio.

Por exemplo, os divisores próprios de 72 são:

$$D_{72}^* = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36\}$$

Ou seja, são os mesmos divisores, porém excluimos o número 72.

Com base no conceito de divisores próprios, temos dois conceitos de números bastante místicos: os números perfeitos e os números amigos.

Encare a leitura sobre esses tópicos como uma curiosidade – a Matemática é linda e pode ser bastante mística.

Números perfeitos: quando a soma dos seus divisores próprios é igual ao próprio número.

Vejamos, como exemplo, o número 28:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & =2^2 \cdot 7 \end{array}$$

Vimos a decomposição em fatores primos de $28 = 2^2 \cdot 7$. Dessa forma, podemos obter o seu conjunto de divisores próprios:

	$7^0 = 1$	$7^1 = 7$
$2^0 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 7 = 7$
$2^1 = 2$	$2 \cdot 1 = 2$	$2 \cdot 7 = 14$
$2^2 = 4$	$4 \cdot 1 = 4$	$4 \cdot 7 = 28$

Portanto, o conjunto de divisores de 28 é:

$$D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

Já o conjunto de divisores próprios é:

$$D_{28}^* = \{1, 2, 4, 7, 14\}$$

Dessa maneira, a soma dos divisores próprios de 28 é:

$$S = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

Logo, 28 é um número perfeito.

Números amigos: quando a soma dos divisores próprios de um número é igual ao outro.

EXEMPLO

284 e 220 são números amigos. Vejamos por quê. Primeiramente, faremos as suas fatorações em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 284 & 2 \\ 142 & 2 \\ 71 & 71 \\ 1 & =2^2 \cdot 71 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & =2^2 \cdot 5 \cdot 11 \end{array}$$

Agora, vamos obter os divisores próprios de cada um desses números, começando por 220:

	$5^0 = 1$ $11^0 = 1$	$5^1 = 5$ $11^0 = 1$		$5^0 = 1$ $11^1 = 11$	$5^1 = 5$ $11^1 = 11$
$2^0 = 1$	$1.1.1 = 1$	$1.5.1 = 5$		$1.1.11 = 11$	$1.5.11 = 55$
$2^1 = 2$	$2.1.1 = 2$	$2.5.1 = 10$		$2.1.1 = 22$	$2.5.11 = 110$
$2^2 = 4$	$4.1.1 = 4$	$4.5.1 = 20$		$4.1.11 = 44$	$4.5.11 = 220$

Anotemos, portanto, os divisores de 220. Como queremos somente a soma, não vamos nos importar com a ordem:

$$D_{220} = \{1, 11, 5, 55, 2, 22, 10, 110, 4, 44, 20, 220\}$$

O conjunto dos divisores próprios exclui o 220:

$$D_{220}^* = \{1, 11, 5, 55, 2, 22, 10, 110, 4, 44, 20\}$$

Agora, tomemos a soma:

$$S = 1 + 11 + 5 + 55 + 2 + 22 + 10 + 110 + 4 + 44 + 20 = 284$$

Olha só, a soma dos divisores próprios de 220 é igual a 284. E o que podemos dizer da soma dos divisores próprios de 284?

Vamos utilizar a fatoração já obtida anteriormente $284 = 2^2 \cdot 71$ para calcular os divisores próprios desse número:

	$71^0 = 1$	$71^1 = 71$
$2^0 = 1$	$1.1 = 1$	$1.71 = 71$
$2^1 = 2$	$2.1 = 2$	$2.71 = 142$
$2^2 = 4$	$4.1 = 4$	$4.71 = 284$

Portanto, o conjunto de divisores de 284 é:

$$D_{284} = \{1, 2, 4, 71, 142, 284\}$$

Já seu conjunto de divisores próprios será:

$$D_{284}^* = \{1, 2, 4, 71, 142\}$$

E a soma dos divisores próprios será:

$$S_{284} = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

Veja só, que coisa interessante, a soma dos divisores próprios de 284 é igual a 220. E a soma dos divisores próprios de 220 é igual a 284. Por isso, eles são números amigos.

Desde a época da Grécia Antiga, existia muita magia em torno desses números, representando papel importante na magia, na feitiçaria, na astrologia e na determinação de horóscopos.

DIRETO DO CONCURSO

006. (CESPE/TJ-RR/AUXILIAR ADMINISTRATIVO/2012) Considere as seguintes definições:

- I) os divisores próprios de um número inteiro positivo n são todos os divisores inteiros positivos de n , exceto o próprio n ;
- II) um número n será perfeito se a soma de seus divisores próprios for igual a n ;
- III) dois números serão números amigos se cada um deles for igual à soma dos divisores próprios do outro.

Com base nessas definições, julgue os itens que seguem.

Se um número é maior que 1, então o conjunto dos seus divisores próprios tem, pelo menos, 2 elementos.



Os números primos possuem apenas dois divisores: a unidade e eles próprios. Porém, o próprio número não é considerado um divisor próprio. Portanto, os números primos possuem um único divisor próprio.

Errado.

007. (CESPE/TJ-RR/AUXILIAR ADMINISTRATIVO/2012) Nenhum número primo é perfeito.



O único divisor próprio de um número primo é a unidade. Assim, a soma dos divisores próprios de qualquer número primo é igual. Como 1 não é um número primo, podemos dizer que nenhum número primo será perfeito.

Certo.

3.3. MMC E MDC

MMC e MDC são as siglas, respectivamente, para mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum. Então, não confunda.

ATENÇÃO 

MMC: Mínimo Múltiplo Comum

MDC: Máximo Divisor Comum

O MMC e o MDC são muito úteis em questões. Existem várias formas de o enunciado cobrar MMC e MDC e você precisará entender pelo contexto da questão. Faremos vários exercícios sobre isso para que você fique afiado(a).

Vejamos como obter o MMC e o MDC entre dois números. Existem duas formas:

Fatorações separadas: por exemplo, o MMC e o MDC entre 72 e 90.

72	2	90	2
36	2	45	3
18	2	15	3
9	3	5	5
3	3	1	$=2 \cdot 3^2 \cdot 5$
1	$=2^3 \cdot 3^2$		

O MMC é dado pelos máximos expoentes encontrados, já o MDC é dado pelos mínimos expoentes encontrados para cada fator primo.

Observe que o máximo expoente do 2 é 2^3 em 72 e o menor é 2^1 em 90. Para o 5, o maior expoente é 5^1 (em 90) e o menor é 5^0 (pois o 5 não aparece na fatoração de 72).

Sendo assim, temos:

$$MMC(72,90) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$$

$$MDC(72,90) = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 2 \cdot 9 \cdot 1 = 18$$

A vantagem de fazer a fatoração separada é que obtemos o MMC e o MDC ao mesmo tempo.

Fatoração conjunta: nesse caso, vamos fatorar os dois números ao mesmo tempo.

Para obter o MMC, fazemos as divisões sempre que for possível dividir, pelo menos, um dos dois números. Vejamos:

72, 90	2
36, 45	

Observe que 36 é divisível por 2, por isso continuaremos a divisão por esse fator primo. Como 45 não é divisível por 2, não faremos nenhuma divisão desse número:

72, 90	2
36, 45	2
18, 45	2
9, 45	3
3, 15	3
1, 5	5
1, 1	$= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Chegamos, portanto, ao MMC, que é igual a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$, como já havíamos encontrado anteriormente.

Para obter o MDC, devemos fazer a fatoração somente enquanto todos os números forem divisíveis pelo fator primo. Vejamos:

72, 90	2
36, 45	

Note que 36 é divisível por 2, mas 45 não. Como estamos obtendo o MDC, não continuaremos a fatoração por 2. Passemos para o próximo primo, no caso, 3:

72, 90	2
36, 45	3
12, 15	3
4, 5	

Observe que não é possível mais fazer a fatoração, porque não existe nenhum fator primo em comum entre 4 e 5. Isto é, não podemos mais fatorar por 3, porque nem 4 nem 5 são divisíveis por 3. Também não podemos fatorar por 5, porque 4 não é divisível por 5.

Por isso, encerramos aqui nossa fatoração e já encontramos o MMC:

72, 90	2
36, 45	3
12, 15	3
4, 5	$= 2 \cdot 3^2$

$$MDC = 2.3^2 = 2.9 = 18$$

Um fato interessante que precisa ser notado é que os números que sobraram na decomposição fatorial conjunta de 72 e 90 podem ser multiplicados ao MDC e encontraremos exatamente o MMC.

$$MMC = 18.4.5 = 18.20 = 360$$

Essa é uma relação interessante que pode ser útil em alguns casos quando você já sabe o MDC entre dois números.

3.3.1. NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI

Dois números são primos entre si quando o MDC entre eles é igual a 1.

Por exemplo, 4 e 15 são primos entre si. Eles não possuem nenhum fator primo em comum. Note que:

$$4 = 2^2$$

$$15 = 3.5$$

Como 4 e 15 não possuem fatores primos em comum, o MDC entre eles é igual a 1. Observe que nenhum desses números é primo, porém eles são primos entre si.

ATENÇÃO



Quando dizemos que dois números são primos entre si, isso não significa que algum deles seja primo.

Por exemplo, 4 e 15 são primos entre si, mas nenhum deles é primo.

DIRETO DO CONCURSO



008. (Q3622419/FUNDATEC/PREFEITURA DE TANGARÁ DA SERRA/ALMOXARIFE/2025) A diferença entre o m.m.c. e o m.d.c. de 12 e 28 é:

- a) 4.
- b) 16.
- c) 72.
- d) 80.



Vamos fazer a fatoração conjunta para obter o MMC:

12, 28	2
6, 14	2
3, 7	3
1, 7	7
1, 1	$= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

Façamos agora o mesmo para obter o MDC.

12, 28	2
6, 14	2
3, 7	$= 2^2 = 4$

Portanto, a diferença entre o MMC e o MDC entre os dois números é:

$$\text{diferença} = 84 - 4 = 80$$

Letra d.

009. (VUNESP/PREFEITURA DE MARÍLIA-SP/AUXILIAR DE ESCRITA/2017) José estuda japonês a cada 4 dias e estuda francês a cada 6 dias. No dia 20 de outubro de 2017, ele estudou essas duas línguas. Desse dia até o último dia do ano de 2017, o número de vezes que José terá estudado, no mesmo dia, francês e japonês, incluindo o dia 20 de outubro, é

- a) 5
- b) 6
- c) 7
- d) 8
- e) 9



José estuda japonês a cada 4 dias, ou seja, nos múltiplos de quatro dias. Por exemplo, se ele estudou no dia 20 de outubro de 2017, ele estudará novamente nos dias 24 e 28 de outubro. Note que José estudará japonês em um determinado dia quando a distância desse dia ao dia 20 de outubro de 2017 for um múltiplo de 4 dias. Ele estudará japonês 4 dias depois, 8 dias depois, 12 dias depois e assim por diante.

O mesmo pode se dizer a respeito do francês. José estudará francês a cada múltiplo de 6 dias, isto é, estudará depois de 6 dias, 12 dias, 18 dias e assim por diante.

Sendo assim, os dias em que ele estudará ambas as línguas ocorrerão no mínimo múltiplo comum entre 4 e 6. Façamos essa conta:

$$\begin{array}{r|l} 4, 6 & 2 \\ 2, 3 & 2 \\ 1, 3 & 3 \\ 1, 1 & = 2^2 \cdot 3 = 12 \end{array}$$

Portanto, José estudará as duas línguas no mesmo dia a cada 12 dias. Podemos calcular, então, quantos dias faltam para o final do ano:

20/10 a 20/11: 31 dias

20/11 a 20/12: 30 dias

20/12 a 31/12: 11 dias

Desse modo, passaram-se 72 dias. Basta dividir por 12 – e teremos 6.

Sendo assim, assumindo que 0 será o dia 20 de outubro e que 72 será o dia 31 de dezembro, tem-se que José estudará as duas línguas nos dias: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72. São 7 dias, portanto.

Letra c.

010. (VUNESP/PM-SP/2017) Um escritório comprou uma caixa de envelopes e irá dividi-los em pequenos pacotes, cada um deles com o mesmo número de envelopes. Se em cada pacote forem colocados ou 8 envelopes, ou 9 envelopes, ou 12 envelopes, não restará envelope algum na caixa. Sabendo-se que, nessa caixa, há menos de 400 envelopes, então o número máximo de envelopes dessa caixa é:

- a) 256
- b) 288
- c) 342
- d) 360
- e) 385



Se o número de envelopes pode ser guardado em pacotes de 8, 9 ou 12, isso significa que esse número de envelopes é um múltiplo comum a esses números.

Sendo assim, vamos extrair o mínimo múltiplo comum:

$$\begin{array}{r|l} 8, 9, 12 & 2 \\ 4, 9, 6 & 2 \\ 2, 9, 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1, 9, 3 & 3 \\ 1, 3, 1 & 3 \\ 1, 1, 1 & = 2^3 \cdot 3^2 = 72 \end{array}$$

Dessa forma, o número de envelopes na caixa é um múltiplo de 72. A maneira mais fácil de obter o maior múltiplo de 72 inferior a 400 é simplesmente dividindo 400 por 72. Vejamos:

$$\begin{array}{r|l} 400 & 72 \\ -360 & 5 \\ \hline & (4) \end{array}$$

O quociente da divisão de 400 por 72 é 5. Portanto, $72 \cdot 5 = 360$ é a nossa resposta.

Nessa questão, é interessante observar que a Vunesp facilitou bastante a vida do(a) candidato(a) chutador(a). Você poderia ter testado as alternativas.

385 não é divisível por 8, claramente, afinal é ímpar.

Assim, bastaria testar 360 e você poderia ver que realmente é divisível tanto por 8, como por 9 e por 12.

Letra d.

011. (VUNESP/SAP-SP/2009) Em um presídio há 400 detentos, sendo 240 no setor X e 160 no setor Y. Para realizar atividades na oficina de artes, o total de detentos foi dividido em grupos com o mesmo número de integrantes, sendo esse número o maior possível, sem deixar nenhum detento de fora e sem misturar os detentos dos dois setores. Dessa forma, foram formados:

- a) 5 grupos
- b) 8 grupos
- c) 10 grupos
- d) 12 grupos
- e) 13 grupos



Os 240 detentos do setor X foram divididos em x grupos de N detentos. Já os 160 detentos do setor Y foram divididos em y grupos de N detentos.

Para que isso seja possível, N deverá ser um divisor comum entre 240 e 160. Obteremos, portanto, o MDC entre esses dois números:

$$\begin{array}{r|l} 240, 160 & 2 \\ 120, 80 & 2 \end{array}$$

60, 40	2
30, 20	2
15, 10	5
3, 2	$= 2 \cdot 5 = 10$

Sendo assim, os detentos foram divididos em grupos de 10. Podemos calcular agora a quantidade de grupos:

$$x = \frac{240}{10} = 24 \quad y = \frac{160}{10} = 16 \therefore x + y = 24 + 16 = 40$$

Os detentos do grupo X foram divididos em 24 grupos, os detentos do grupo Y foram divididos em 16 grupos. Logo, o total de grupos em que eles foram divididos é igual a 40.

Letra a.

012. (IBFC/EMBASA/ASSISTENTE DE LABORATÓRIO/2017) Um marceneiro possui duas barras de ferro, uma com 1,40 metros de comprimento e outra com 2,45 metros de comprimento. Ele pretende cortá-las em barras de tamanhos iguais, de modo que cada pedaço tenha a maior medida possível. Nessas circunstâncias, o total de pedaços que o marceneiro irá cortar, utilizando as duas de ferro, é:

- a) 9
- b) 11
- c) 12
- d) 13



Essa questão nos mostra que o conceito de MDC pode se aplicar também a números racionais com certa criatividade.

Para isso, transformaremos os números fornecidos em números inteiros multiplicando por 100. Assim, temos 140 e 245. Vamos tomar o MDC entre esses dois números:

140, 245	5
28, 49	7
4, 7	$= 5 \cdot 7 = 35$

Note que os termos que restaram correspondem exatamente aos números de pedaços de ferro que serão cortados (4 e 7). Portanto, o total de pedaços cortados será $4 + 7 = 11$.

Letra b.

013. (VUNESP/MPE-SP/OFCIAL DE PROMOTORIA/2016) No aeroporto de uma pequena cidade chegam aviões de três companhias aéreas. Os aviões da companhia A chegam a cada 20 minutos, da companhia B a cada 30 minutos e da companhia C a cada 44 minutos. Em um domingo, às 7 horas, chegaram aviões das três companhias ao mesmo tempo, situação que voltará a se repetir, nesse mesmo dia, às:

- a) 16h30 min
- b) 17h30 min
- c) 18h30 min
- d) 17 horas
- e) 18 horas



Os aviões da companhia A chegarão depois de 20 minutos, depois de 40 minutos, depois de 60 minutos. Ou seja, a cada múltiplo de 20.

Os aviões da companhia B chegarão depois 30 minutos, depois de 60 minutos, depois de 90 minutos. Isto é, a cada múltiplo de 30.

Da mesma forma, os aviões da companhia C chegarão depois de 44 minutos, depois de 88 minutos, depois de 132 minutos. Ou seja, a cada múltiplo de 44 minutos.

Se todos os aviões chegaram juntos às 7 horas, eles chegarão juntos novamente no MMC entre 20, 30 e 44:

20, 30, 44	2
10, 15, 22	2
5, 15, 11	3
5, 5, 11	5
1, 1, 11	11
1, 1, 1	$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 660$

Assim, a situação se repetirá depois de 660 minutos, isto é, depois de 11 horas.

Sendo assim, se os aviões chegaram juntos às 7 horas, chegarão juntos novamente às 18 horas.

Letra e.

014. (MPE-GO/ITUMBIARA/SECRETÁRIO AUXILIAR/2017) Três vigias fazem rondas noturnas em um determinado prédio, cada um em seu setor. O primeiro tem que acionar o relógio de controle do seu setor a cada 36 minutos; o segundo, a cada 24 minutos, e o terceiro, a cada 18 minutos. Dessa maneira, pode-se afirmar que eles acionam simultaneamente o relógio de controle de seus respectivos setores a cada:

- a) 1h00 min

- b) 1h06 min
- c) 1h12 min
- d) 1h18 min
- e) 1h24 min



Cada vigia acionará o relógio de controle após um múltiplo do tempo em que foram programados para fazer.

Portanto, devemos tomar o MMC entre 18, 24 e 36:

18, 24, 36	2
9, 12, 18	2
9, 6, 9	2
9, 3, 9	3
3, 1, 3	3
1, 1, 1	$= 2^3 \cdot 3^2 = 72$

Dessa forma, eles acionarão o relógio de controle juntos a cada 72 minutos. Como o enunciado pediu o tempo em horas e minutos e como 1 hora é igual a 60 minutos, devemos dividir 72 por 60:

$$\begin{array}{r}
 72 \overline{) 60} \\
 \underline{-60} \\
 0
 \end{array}$$

(12)

O significado da divisão é que 72 dividido por 60 é capaz de completar 1 hora e deixa resto de 12 minutos. Sendo assim, 72 minutos equivalem a 1 hora completa e 12 minutos.

Letra c.

015. (VUNESP/CÂMARA DE SUMARÉ-SP/ESCRITURÁRIO/2017) Se, numa divisão, o divisor e o quociente são iguais, e o resto é 10, sendo esse resto o maior possível, então o dividendo é:

- a) 131
- b) 121
- c) 120
- d) 110
- e) 101



Precisamos relembrar o significado do quociente e do resto em uma divisão.

$$\begin{array}{r} \text{N} \quad | \quad \text{x} \\ -\text{x}^2 \quad \text{x} \\ \hline (10) \end{array}$$

Temos que:

$$N = x^2 + 10$$

A questão nos informou que o resto da divisão é igual a 10 e que esse é o maior valor possível. Sendo assim, o divisor é igual a 11, porque o maior resto possível na divisão por 11 é exatamente igual a 10.

$$N = x^2 + 10 = 11^2 + 10 = 121 + 10 = 131$$

Letra a.

016. (VUNESP/CÂMARA DE SUMARÉ-SP/ESCRITURÁRIO/2017) No depósito de uma loja de doces, há uma caixa contendo n bombons. Para serem vendidos, devem ser repartidos em pacotes iguais, todos com a mesma quantidade de bombons. Com os bombons dessa caixa, podem ser feitos pacotes com 5, ou com 6, ou com 7 unidades cada um, e, nesses casos, não faltará nem sobrar nenhum bombom. Nessas condições, o menor valor que pode ser atribuído a n é

- a) 280
- b) 265
- c) 245
- d) 230
- e) 210



Para que certa quantidade de bombons possa encher pacotes com 5, 6 ou 7, essa quantidade deve ser um múltiplo desses três números. Tomemos, então, o MMC entre eles.

O MMC é mais facilmente calculado se o(a) aluno(a) perceber que 5, 6 e 7 são todos primos entre si. Sendo assim, $\text{MMC} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$.

Letra e.

017. (FEPESE/CELESC/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2016) João trabalha 5 dias e folga 1, enquanto Maria trabalha 3 dias e folga 1. Se João e Maria folgam no mesmo dia, então quantos dias, no mínimo, passarão para que eles folguem no mesmo dia novamente?

- a) 8
- b) 10
- c) 12
- d) 15
- e) 24



Questão interessante. Note que, se João folgar no dia 0, ele terá:

F	T	T	T	T	T	F
0	1	2	3	4	5	6

Portanto, se ele folgar no dia 0, ele somente voltará a folgar 6 dias depois, porque precisará trabalhar 5 dias. Sendo assim, João folgará no dia 0, 6, 12, 18 e assim por diante.

Raciocínio análogo é válido para Maria. Se ela folga no dia 0, somente voltará a folgar 4 dias depois. Sendo assim, Maria folgará nos dias 0, 4, 8, 12 e assim por diante.

Precisamos, portanto, achar o mínimo múltiplo comum entre 6 e 4, que é 12:

4, 6	2
2, 3	2
1, 3	3
1, 1	$= 2^2 \cdot 3 = 12$

Assim, eles somente voltarão a folgar juntos depois de 12 dias.

Letra c.

018. (CESPE/TRT 16ª REGIÃO-MA/AUXILIAR JUDICIÁRIO/2005) Considere que foram gastos R\$ 1.563,00 para abastecer com café e açúcar a copa de um escritório de advocacia. Sabendo-se que cada pacote de 500 g de café custou R\$ 5,85 e que cada pacote de 5 kg de açúcar custou R\$ 4,25 e ainda que as quantidades de pacotes de açúcar e de pacotes de café estão, nessa ordem, na proporção 2/3, julgue os itens seguintes.

O máximo divisor comum entre os números que representam as quantidades de pacotes de café e de açúcar é superior a 50.



Façamos um lote de café e açúcar como tendo 2 pacotes de açúcar e 3 pacotes de café, que é exatamente a proporção citada no enunciado. O preço de um lote será:

$$L = 2.4,25 + 3.5,85 = 26,05$$

Como foram gastos R\$1.563,00, temos que a quantidade de lotes comprados foi:

$$n = \frac{1563}{26,05} = 60$$

Observe que, como 2 e 3 são primos entre si, o MDC entre a quantidade de pacotes de café e de açúcar é exatamente igual a 60.

Como cada lote tem 2 pacotes de açúcar e 3 pacotes de café, então foram comprados 120 pacotes de açúcar e 180 pacotes de café.

O MDC entre 120 e 180 é exatamente igual a $60 > 50$.

Certo.

019. (CESPE/TRT 16ª REGIÃO-MA/AUXILIAR JUDICIÁRIO/2005) O mínimo múltiplo comum entre os números que representam as quantidades de pacotes de café e de açúcar é inferior a 300.



Já vimos que o MMC corresponde ao produto do MDC pelos termos que sobraram na decomposição, no caso, exatamente 2 e 3. Portanto:

$$MMC = 60.2.3 = 360 > 300$$

Outra forma de calcular o MMC é diretamente:

120, 180	2
60, 90	2
30, 45	2
15, 45	3
5, 15	3
5, 5	5
1, 1	$= 2^3.3^2.5 = 8.9.5 = 360$

De qualquer forma, o MMC obtido é igual a 360, que é superior a 300, ao contrário do que foi afirmado no enunciado.

Errado.

3.4. PRODUTOS NOTÁVEIS

Os produtos notáveis são fatorações muito úteis em questões. É mais fácil que eles sejam cobrados misturados em questões de outros assuntos.

1) Quadrado da soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Demonstração:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

2) Quadrado da diferença: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Demonstração:

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b) \\ &= a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

3) Soma pela diferença: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Demonstração:

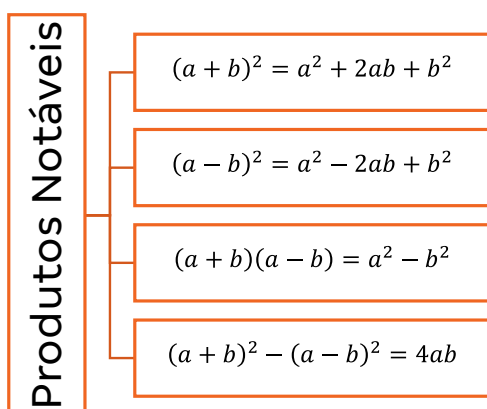
$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= (a + b)(a - b) \\ &= a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2\end{aligned}$$

4) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

Demonstração:

Usando o produto notável anterior, temos que:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 - (a - b)^2 &= [(a + b) + (a - b)][(a + b) - (a - b)] \\ &= [2a][2b] = 4ab\end{aligned}$$



DIRETO DO CONCURSO

- 020.** (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) Depois de ensinar que $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, um professor pediu que os alunos utilizassem a diferença de dois quadrados para fazer a conta “105 vezes 95” por meio de um cálculo mental simples. Os alunos que seguiram corretamente a proposta do professor finalizaram a operação fazendo a conta
- a) $9925 + 50$.
 - b) $10050 - 75$.
 - c) $10025 - 50$.
 - d) $10000 - 25$.
 - e) $9950 + 25$.



Questão muito boa para treinarmos os produtos notáveis.

$$(a + b) \cdot (a - b) = (a^2 - b^2)$$

Fazendo $a = 100$ e $b = 5$, temos:

$$(100 + 5) \cdot (100 - 5) = (100^2 - 5^2)$$

$$(105) \cdot (95) = 10000 - 25$$

Portanto, o produto citado pode ser obtido pela diferença $10000 - 25$.

Letra d.

- 021.** (FUNDATEC/PREFEITURA DE PACAMBI-RS/FISCAL AMBIENTAL/2020) O resultado da seguinte operação $(a^2 + 2ab + b^2)/(a^2 - b^2)$ é:

- a) $2ab$
- b) a/b
- c) $a + b/a - b$
- d) a^2/b^2
- e) $a + b$



Precisamos reconhecer os dois produtos notáveis presentes na expressão. No numerador, temos o quadrado do primeiro mais o quadrado do segundo mais duas vezes o primeiro pelo segundo. Então, temos o quadrado da soma.

No denominador, temos a diferença de quadrados, que pode ser expressa como o produto da soma pela diferença. Assim, temos:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b)^2}{(a + b) \cdot (a - b)}$$

Simplificando $(a + b)$ no numerador pelo denominador, teremos:

$$\frac{(a + b)^2}{(a + b) \cdot (a - b)} = \frac{(a + b)}{(a - b)}$$

Letra c.

3.4.1. PRODUTOS NOTÁVEIS DO TERCEIRO GRAU

Existem muitos outros produtos notáveis. Podemos listar mais alguns. Mas essa lista é apenas a título de curiosidade, pois acho pouco provável que as provas cheguem além dos principais produtos notáveis que já foram apresentados anteriormente:

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
- $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$;
- $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$.

3.5. TEOREMA DE EUCLIDES

Perceba que os números primos vão ficando cada vez mais raros. Entre os 10 primeiros números naturais, temos 4 primos (2, 3, 5 e 7). Entre 90 e 100, só temos 1 primo (97).

Diante disso, é natural que as pessoas se questionem: será que o conjunto de números primos tem fim? Em outras palavras, será que existe o maior número primo?

A resposta é que não. Existem infinitos números primos. E isso pode ser demonstrado pelo conceito de redução ao absurdo.

Obs.: A redução ao absurdo consiste em supor que uma tese é verdadeira e chegar a uma contradição. Quando chegamos a uma contradição, provamos que a tese é, na verdade, falsa.

Suponha que exista um conjunto finito de números primos: $p_1, p_2, \dots, p_n$. Considere, então, o número N o produto de todos esses números primos.

$$N = p_1 p_2 \dots p_n$$

Agora, tomemos o número $N + 1$:

$$N + 1 = p_1 p_2 \dots p_n + 1$$

Perceba que o resto da divisão de $N + 1$ por qualquer um dos números primos conhecidos: $p_1, p_2, \dots, p_n$ é igual a 1. Portanto, $(N + 1)$ não é divisível por nenhum dos números primos anteriores. Sendo assim, $(N + 1)$ é primo.

Note que chegamos a um absurdo. Isso significa que a nossa suposição inicial era falsa. Ou seja, não existe um conjunto finito de números primos p_n . Desse modo, o conjunto de números primos é infinito.

Aqui, acreditamos que você não precisa saber essa demonstração. No entanto, precisa saber que existem infinitos números primos, porque isso pode ser cobrado numa questão de prova.

RESUMO

Nesta seção, iremos aprender alguns conceitos essenciais para a Matemática. Dentre eles, está a ideia de múltiplos, divisores, números primos e suas respectivas características peculiares. Falaremos também sobre a relação dos números primos com o Teorema Fundamental da Aritmética. Além disso, veremos a definição de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum e a importância desses conceitos para a Aritmética.

MÚLTIPLOS

Chamamos um número **múltiplo** quando ele for obtido a partir da multiplicação de outro número por um fator. Como exemplo, temos que o número 36 é múltiplo de 4, pois multiplicando 4 pelo fator 9 obtemos o resultado 36.

A seguir, são mostradas algumas definições e características a respeito dos múltiplos:

- os múltiplos de qualquer número são infinitos;
- todo número natural é múltiplo dele mesmo;
- o número 0 só tem um múltiplo: o próprio 0;
- o número 0 é múltiplo de todos os números.

DIVISORES

Chamamos um número **divisor** de outro número quando a divisão entre eles é um resultado exato, isto é, o resto da operação é 0. Como exemplo, o número 4 é divisor de 36, pois dividindo 36 por 4 obtemos um resultado exato 9.

A seguir, são mostradas algumas definições e características a respeito dos divisores:

- todo número inteiro possui divisores;
- o menor divisor de um número será sempre o número 1;
- o maior divisor de um número será sempre o próprio número;
- o número 0 não é divisor de nenhum número natural.

Note que os conceitos de números múltiplos e divisores são opostos. Considere dois números naturais a e b . Se a é **múltiplo** de b , então b também é **divisor** de a .

NÚMEROS PRIMOS

Um conceito fundamental da Aritmética é a existência dos chamados **números primos**. Um número inteiro p é dito primo caso $p \geq 2$ e os seus divisores positivos sejam somente 1 e p . Existem alguns teoremas e algumas propriedades elementares dos números primos. Dentre eles, cabe destacar:

- a sequência de números primos existentes é infinita;
- o número 2 é o único primo que também é par;

- todo número inteiro $m \geq 2$ possui pelo menos um divisor primo;
- sejam a e b números inteiros. Se p é um número primo e p é divisível por $a \cdot b$, então p é divisível por a ou p é divisível por b .

A seguir, foi elaborada uma tabela com os números primos de 2 a 1.000, separados por cada centena para facilitar a visualização. Leia atentamente e tente perceber padrões:

Números Primos									
2 a 100	2	3	5	7	11	13	17	19	23
	29	31	37	41	43	47	53	59	61
	67	71	73	79	83	89	97		
101 a 200	101	103	107	109	113	127	131	137	139
	149	151	157	163	167	173	179	181	191
	193	197	199						
201 a 300	211	223	227	229	233	239	241	251	257
	263	269	271	277	281	283	293		
301 a 400	307	311	313	317	331	337	347	349	353
	359	367	373	379	383	389	397		
401 a 500	401	409	419	421	431	433	439	443	449
	457	461	463	467	479	487	491	499	
501 a 600	503	509	521	523	541	547	557	563	569
	571	577	587	593	599				
601 a 700	601	607	613	617	619	631	641	643	647
	653	659	661	673	677	683	691		
701 a 800	701	709	719	727	733	739	743	751	757
	761	769	773	787	797				
801 a 900	809	811	821	823	827	829	839	853	857
	859	863	877	881	883	887			
901 a 1000	907	911	919	929	937	941	947	953	967
	971	977	983	991	997				

Observe que, exceto o número 2, todos os números primos são ímpares. Analisar semelhanças e se acostumar com esses números tornará, com o tempo, a identificação de um número primo mais fácil e rápida.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Como o nome já indica, aprenderemos agora um dos principais teoremas presentes na Aritmética. O **Teorema Fundamental da Aritmética** afirma que todo número maior ou igual a 2 pode ser escrito como produto apenas de números primos. A importância dessa afirmação é a garantia de uma representação única para todo e qualquer número natural.

Um exemplo de aplicabilidade desse conhecimento é a criptografia. Isso porque textos podem ser facilmente codificados como uma sequência de números primos.

FATORAÇÃO

A fatoração numérica é totalmente baseada no Teorema Fundamental da Aritmética. O cálculo da fatoração tem como intuito destrinchar e identificar todos os fatores que, multiplicados entre si, compõem um número. Trata-se de um artifício matemático para decompor números usando apenas fatores primos. Dessa forma, o número fatorado será um produto de fatores irredutíveis.

Para fatorar um número, devemos seguir alguns passos:

- 1) Divida o número pelo seu menor divisor primo possível.
- 2) Divida o quociente obtido pelo mesmo número primo. Caso não seja possível, divida o quociente pelo próximo menor divisor primo possível. Sequência de primos: 2, 3, 5, 7, 11...
- 3) Repita o passo 2 até que o quociente seja 1.

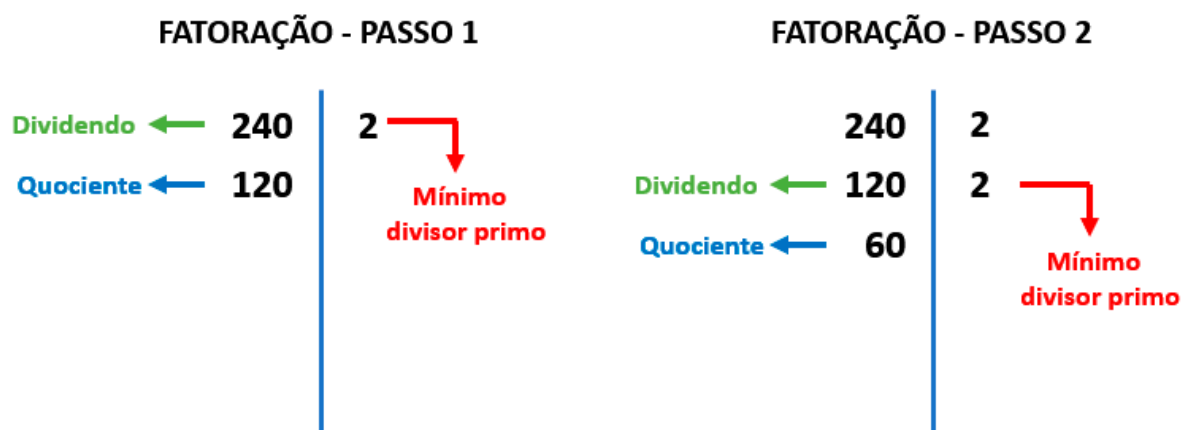
Primeiramente, observe algumas fatorações de números mais simples:

$$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$

$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$$

$$36 = 4 \cdot 9 = (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2$$

Agora, observe o passo a passo do procedimento feito para números mais complexos. No exemplo, fatoramos o número 240:



FATORAÇÃO - PASSO 3

240	2
120	2
60	2
Dividendo ← 30	
Quociente ← 2	

Mínimo divisor primo

FATORAÇÃO - PASSO 4

240	2
120	2
60	2
30	2
Dividendo ← 15	
Quociente ← 2	

Mínimo divisor primo

FATORAÇÃO - PASSO 5

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
Dividendo ← 5	
Quociente ← 3	

Mínimo divisor primo

FATORAÇÃO - PASSO 6

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
Dividendo ← 1	
Quociente ← 5	

Mínimo divisor primo

Como atingimos o valor 1 no quociente, já temos o resultado. Dessa forma, a fatoração de 240 é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$.

MÁXIMO DIVISOR COMUM

Para entender esse conceito, considere dois números a e b diferentes de 0. O **máximo divisor comum** (M.D.C. ou MDC) de dois inteiros a e b é o maior inteiro possível que divide a e b ao mesmo tempo. Em outras palavras, o MDC nada mais é do que o produto de todos os divisores comuns entre dois ou mais números inteiros. Podemos representar o MDC de dois números a e b por MDC (a , b).

PROPRIEDADES DO MDC

O conceito de MDC contém diversas propriedades associadas. A seguir, é possível encontrar algumas das propriedades principais:

- o MDC de dois números consecutivos é 1;
- para quaisquer números inteiros positivos a e b , existe um MDC entre eles;

- se b é divisor de a e $b > 0$, o $\text{MDC}(a, b) = b$;
- todo número divisor comum de a e b também será divisor do $\text{MDC}(a, b)$.

CÁLCULO DO MDC

Para calcular o MDC entre números, devemos realizar a fatoração por meio da decomposição em fatores primos dos números indicados. O MDC será o produto de todos os divisores simultâneos dos números analisados.

Para exemplificar, vamos calcular o MDC entre 24 e 28 através da fatoração simultânea. Apesar de o exemplo ser com apenas dois números, esse cálculo pode ser feito para conjuntos com três ou mais números também. O procedimento é o mesmo:

MDC ENTRE 24 e 28

24	28	2	→ Divisor simultâneo
12	14	2	→ Divisor simultâneo
6	7	2	→ Divisor individual de 6
3	7	3	→ Divisor individual de 3
1	7	7	→ Divisor individual de 7
1	1	2 · 2	

→ MDC (24, 28) = 4

Dessa forma, o $\text{MDC}(24, 28)$ será o produto entre todos os divisores simultâneos durante a fatoração. Nesse caso, o MDC será o produto de $2 \cdot 2$. Então, o $\text{MDC}(24, 28) = 4$.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Considere dois números inteiros a e b diferentes de 0. O **mínimo múltiplo comum** (M.M.C. ou MMC) entre a e b é o menor número inteiro positivo múltiplo desses dois números ao mesmo tempo.

PROPRIEDADES DO MMC

Os mínimos múltiplos comuns possuem diversas propriedades. Dentre elas, cabe citar:

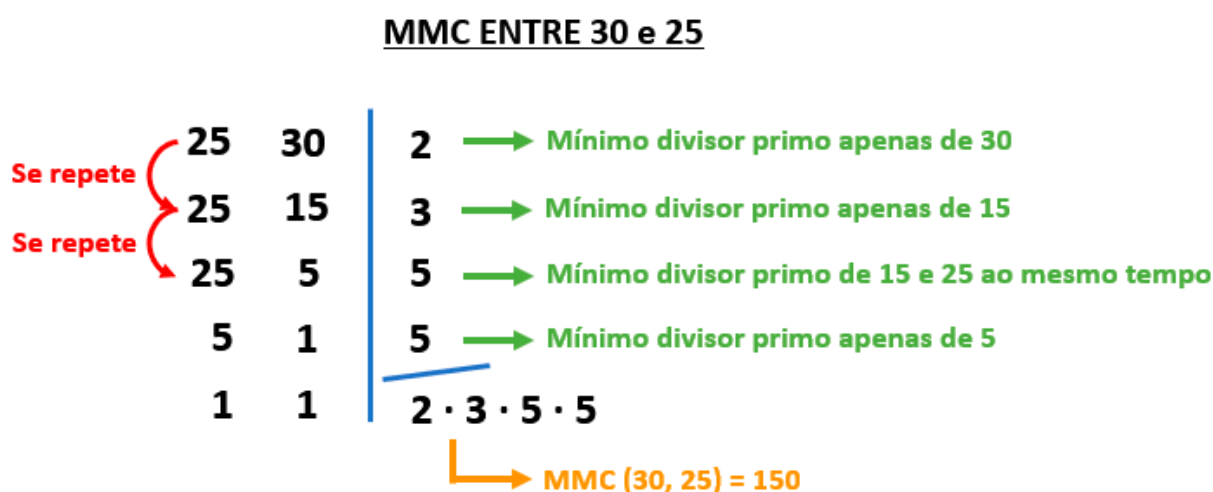
- o MMC entre dois números primos é o produto entre eles;
- se a é divisível por b , então o $\text{MMC}(a, b) = a$;
- ao multiplicar ou dividir dois números a e b por um fator k diferente de 0, o MMC será também multiplicado pelo mesmo fator. Isto é:

$$MMC(a \cdot k, b \cdot k) = MMC(a, b) \cdot k$$

CÁLCULO DO MMC

Para o cálculo do MMC, também utilizaremos o método da fatoração o qual se baseia na decomposição em fatores primos. O MMC será o produto de todos os números primos resultantes da fatoração.

Vale lembrar que, nessa fatoração conjunta, basta encontrarmos um divisor de pelo menos um dos números analisados para incluirmos esse fator no cálculo final do MMC. O procedimento se encerra quando o resto da fatoração é 1. Para exemplificar, vamos calcular o MMC entre 30 e 25:



OBS: Quando o divisor não é simultâneo, o número não divisível pelo fator se repete na próxima linha.

Dessa maneira, o MMC (30, 25) será a multiplicação dos fatores primos encontrados. Isto é, todos os fatores são considerados: tanto aqueles que são divisores de apenas um número quanto aqueles que dividem os dois números ao mesmo tempo.

Nesse caso, o MMC (30, 25) = 150. Isso significa que 150 é o menor múltiplo possível entre os números 30 e 25 ao mesmo tempo. Observe:

$$30 \cdot 5 = 150$$

$$25 \cdot 6 = 150.$$

MMC E FRAÇÕES

O MMC também é bastante empregado no cálculo de frações. Para operações de soma ou subtração de frações, é necessário que os denominadores sejam iguais. A fim de atingir isso, é calculado o MMC entre os dois denominadores das frações. Para exemplificar, faremos a soma de $\frac{5}{6} + \frac{4}{15}$.

Primeiramente, precisamos encontrar o MMC entre 6 e 15. Observe o cálculo a seguir:

MMC ENTRE 6 e 15

6	15	2	→ Mínimo divisor primo apenas de 6
3	15	3	→ Mínimo divisor primo de 3 e 15 ao mesmo tempo
1	5	5	→ Mínimo divisor primo apenas de 5
1	1	2 · 3 · 5	
			→ MMC (6, 15) = 30

Sabendo que o novo denominador da fração será 30, precisamos encontrar seus respectivos numeradores. Isso é feito a partir de uma simples regra de três. Observe como encontramos os valores de x e y a seguir:

$$\frac{5}{6} = \frac{x}{30} \rightarrow x = \left(\frac{30}{6}\right) \cdot 5 = 5 \cdot 5$$

$$\frac{4}{15} = \frac{y}{30} \rightarrow y = \left(\frac{30}{15}\right) \cdot 4 = 2 \cdot 4$$

Assim, resolvendo a soma do exemplo dado, temos:

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{15} = \frac{(5 \cdot 5)}{30} + \frac{(2 \cdot 4)}{30} = \frac{25 + 8}{30} = \frac{33}{30} = \frac{11}{10}$$

Obs.: Note que as frações são equivalentes, pois $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$ e $\frac{4}{15} = \frac{8}{30}$.

QUESTÕES COMENTADAS EM AULA

001. (FGV/PREFEITURA DE CUIABÁ-MT/TÉCNICO EM ADMINISTRAÇÃO ESCOLAR/2015) Rogério cria galinhas para a produção de ovos e, certo dia, ele coletou 165 ovos. Arrumando esses ovos em caixas de uma dúzia, o número máximo de caixas completas que ele conseguiu foi:

- a) 12
- b) 13
- c) 14
- d) 15
- e) 16

002. (Q3663117/INSTITUTO AVANÇA-SP/CÂMARA DE ITUPEVA/AGENTE LEGISLATIVO/2025) Qual dos seguintes números é um divisor de 84?

- a) 10
- b) 7
- c) 9
- d) 13
- e) 15

003. (IBFC/POLÍCIA CIENTÍFICA-PR/PERITO CRIMINAL-ÁREA 8/2017) Dentre os números descritos nas alternativas, o único que não é divisível por 9 é:

- a) 1359
- b) 21744
- c) 8766
- d) 123456
- e) 23130

004. (FGV/SEE-PE/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) O número de três algarismos: $n = 68D$ é primo.

O algarismo D, das unidades, é:

- a) 1
- b) 3
- c) 5
- d) 7
- e) 9

005. (FCC/PREFEITURA DE RECIFE-PE/ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA/2019) O número de divisores inteiros positivos de 600 é

- a) 25.
- b) 23.
- c) 22.
- d) 21.
- e) 24.

006. (CESPE/TJ-RR/AUXILIAR ADMINISTRATIVO/2012) Considere as seguintes definições:

I) os divisores próprios de um número inteiro positivo n são todos os divisores inteiros positivos de n , exceto o próprio n ;

II) um número n será perfeito se a soma de seus divisores próprios for igual a n ;

III) dois números serão números amigos se cada um deles for igual à soma dos divisores próprios do outro.

Com base nessas definições, julgue os itens que seguem.

Se um número é maior que 1, então o conjunto dos seus divisores próprios tem, pelo menos, 2 elementos.

007. (CESPE/TJ-RR/AUXILIAR ADMINISTRATIVO/2012) Nenhum número primo é perfeito.

008. (Q3622419/FUNDATEC/PREFEITURA DE TANGARÁ DA SERRA/ALMOXARIFE/2025) A diferença entre o m.m.c. e o m.d.c. de 12 e 28 é:

- a) 4.
- b) 16.
- c) 72.
- d) 80.

009. (VUNESP/PREFEITURA DE MARÍLIA-SP/AUXILIAR DE ESCRITA/2017) José estuda japonês a cada 4 dias e estuda francês a cada 6 dias. No dia 20 de outubro de 2017, ele estudou essas duas línguas. Desse dia até o último dia do ano de 2017, o número de vezes que José terá estudado, no mesmo dia, francês e japonês, incluindo o dia 20 de outubro, é

- a) 5
- b) 6
- c) 7
- d) 8
- e) 9

010. (VUNESP/PM-SP/2017) Um escritório comprou uma caixa de envelopes e irá dividi-los em pequenos pacotes, cada um deles com o mesmo número de envelopes. Se em cada pacote forem colocados ou 8 envelopes, ou 9 envelopes, ou 12 envelopes, não restará envelope algum na caixa. Sabendo-se que, nessa caixa, há menos de 400 envelopes, então o número máximo de envelopes dessa caixa é:

- a) 256
- b) 288
- c) 342
- d) 360
- e) 385

011. (VUNESP/SAP-SP/2009) Em um presídio há 400 detentos, sendo 240 no setor X e 160 no setor Y. Para realizar atividades na oficina de artes, o total de detentos foi dividido em grupos com o mesmo número de integrantes, sendo esse número o maior possível, sem deixar nenhum detento de fora e sem misturar os detentos dos dois setores. Dessa forma, foram formados:

- a) 5 grupos
- b) 8 grupos
- c) 10 grupos
- d) 12 grupos
- e) 13 grupos

012. (IBFC/EMBASA/ASSISTENTE DE LABORATÓRIO/2017) Um marceneiro possui duas barras de ferro, uma com 1,40 metros de comprimento e outra com 2,45 metros de comprimento. Ele pretende cortá-las em barras de tamanhos iguais, de modo que cada pedaço tenha a maior medida possível. Nessas circunstâncias, o total de pedaços que o marceneiro irá cortar, utilizando as duas de ferro, é:

- a) 9
- b) 11
- c) 12
- d) 13

013. (VUNESP/MPE-SP/OFICIAL DE PROMOTORIA/2016) No aeroporto de uma pequena cidade chegam aviões de três companhias aéreas. Os aviões da companhia A chegam a cada 20 minutos, da companhia B a cada 30 minutos e da companhia C a cada 44 minutos. Em um domingo, às 7 horas, chegaram aviões das três companhias ao mesmo tempo, situação que voltará a se repetir, nesse mesmo dia, às:

- a) 16h30 min
- b) 17h30 min
- c) 18h30 min
- d) 17 horas
- e) 18 horas

014. (MPE-GO/ITUMBIARA/SECRETÁRIO AUXILIAR/2017) Três vigias fazem rondas noturnas em um determinado prédio, cada um em seu setor. O primeiro tem que acionar o relógio de controle do seu setor a cada 36 minutos; o segundo, a cada 24 minutos, e o terceiro, a cada 18 minutos. Dessa maneira, pode-se afirmar que eles acionam simultaneamente o relógio de controle de seus respectivos setores a cada:

- a) 1h00 min
- b) 1h06 min
- c) 1h12 min
- d) 1h18 min
- e) 1h24 min

015. (VUNESP/CÂMARA DE SUMARÉ-SP/ESCRITURÁRIO/2017) Se, numa divisão, o divisor e o quociente são iguais, e o resto é 10, sendo esse resto o maior possível, então o dividendo é:

- a) 131
- b) 121
- c) 120
- d) 110
- e) 101

016. (VUNESP/CÂMARA DE SUMARÉ-SP/ESCRITURÁRIO/2017) No depósito de uma loja de doces, há uma caixa contendo n bombons. Para serem vendidos, devem ser repartidos em pacotes iguais, todos com a mesma quantidade de bombons. Com os bombons dessa caixa, podem ser feitos pacotes com 5, ou com 6, ou com 7 unidades cada um, e, nesses casos, não faltará nem sobrar nenhum bombom. Nessas condições, o menor valor que pode ser atribuído a n é

- a) 280
- b) 265
- c) 245
- d) 230
- e) 210

017. (FEPESE/CELESC/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2016) João trabalha 5 dias e folga 1, enquanto Maria trabalha 3 dias e folga 1. Se João e Maria folgam no mesmo dia, então quantos dias, no mínimo, passarão para que eles folguem no mesmo dia novamente?

- a) 8
- b) 10
- c) 12
- d) 15
- e) 24

018. (CESPE/TRT 16ª REGIÃO-MA/AUXILIAR JUDICIÁRIO/2005) Considere que foram gastos R\$ 1.563,00 para abastecer com café e açúcar a copa de um escritório de advocacia. Sabendo-se que cada pacote de 500 g de café custou R\$ 5,85 e que cada pacote de 5 kg de açúcar custou R\$ 4,25 e ainda que as quantidades de pacotes de açúcar e de pacotes de café estão, nessa ordem, na proporção 2/3, julgue os itens seguintes.

O máximo divisor comum entre os números que representam as quantidades de pacotes de café e de açúcar é superior a 50.

019. (CESPE/TRT 16ª REGIÃO-MA/AUXILIAR JUDICIÁRIO/2005) O mínimo múltiplo comum entre os números que representam as quantidades de pacotes de café e de açúcar é inferior a 300.

020. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) Depois de ensinar que $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, um professor pediu que os alunos utilizassem a diferença de dois quadrados para fazer a conta “105 vezes 95” por meio de um cálculo mental simples. Os alunos que seguiram corretamente a proposta do professor finalizaram a operação fazendo a conta

- a) $9925 + 50$.
- b) $10050 - 75$.
- c) $10025 - 50$.
- d) $10000 - 25$.
- e) $9950 + 25$.

021. (FUNDATEC/PREFEITURA DE PACAMBI-RS/FISCAL AMBIENTAL/2020) O resultado da seguinte operação $(a^2 + 2ab + b^2)/(a^2 - b^2)$ é:

- a) $2ab$
- b) a/b
- c) $a + b/a - b$
- d) a^2/b^2
- e) $a + b$

EXERCÍCIOS

022. (Q3665779/AMAUC/PREFEITURA DE ALTO BELA VISTA/PROFESSOR II/2025) As luzes da decoração de Natal da praça de uma cidade piscam de forma sincronizada. As vermelhas piscam em intervalos de 5 segundos, as verdes piscam em intervalos de 8 segundos, as azuis piscam em intervalos de 12 segundos e as amarelas piscam em intervalos de 15 segundos. Sendo assim, qual é o intervalo de tempo entre os momentos em que todas as luzes piscam simultaneamente?

- a) O intervalo é de 30 segundos.
- b) O intervalo é de 40 segundos.
- c) O intervalo é de 50 segundos.
- d) O intervalo é de 3 minutos.
- e) O intervalo é de 2 minutos.

023. (VUNESP/PREFEITURA DE MORRO AGUDO-SP/AGENTE DO SETOR DE ÁGUA E ESGOTO/2020) Em uma palestra, estavam presentes 48 mulheres e 42 homens. Ao término dessa palestra, todas essas pessoas foram divididas em grupos, para a realização de uma atividade, de modo que todos os grupos tenham o mesmo número de pessoas e na maior quantidade possível. Sabendo-se que não tinham homens e mulheres juntos, em um mesmo grupo, então o número de grupos formados somente com mulheres foi:

- a) 9.
- b) 8.
- c) 7.
- d) 6.
- e) 5.

024. (Q3204227/VUNESP/PREFEITURA DE OSASCO/PROFESSOR/2024) Sejam $\text{mmc}(A, B, C)$ o mínimo múltiplo comum de A , B e C , e $\text{mdc}(D, E, F)$ o máximo divisor comum de D , E e F , respectivamente. Sendo assim, $\text{mmc}(12, 18, 72)/\text{mdc}(28, 56, 108)$ é igual a

- a) 36.
- b) 18.
- c) 12.
- d) 9.
- e) 6.

025. (Q3117171/FGV/PREFEITURA DE CARAGUATATUBA/ELETRICISTA/2024) Em uma data comemorativa, Sr. Damião decidiu montar saquinhos de guloseimas para distribuir às crianças vizinhas. Para isso, tinha disponíveis 300 balas, 90 paçocas e 150 pirulitos.

Damião decidiu que cada saquinho devia conter balas, paçocas e pirulitos, distribuindo cada tipo de doce igualmente entre os saquinhos e sem que haja sobra de qualquer quantidade de doces. Decidiu ainda que distribuiria a maior quantidade possível de saquinhos.

Cada saquinho terá então as seguintes quantidades de balas, de paçocas e de pirulitos, respectivamente:

- a) 3, 5 e 10.
- b) 6, 2 e 3.
- c) 6, 3 e 5.
- d) 10, 5 e 3.
- e) 10, 3 e 5.

026. (VUNESP/PREFEITURA DE MORRO AGUDO-SP/AGENTE DE LICITAÇÕES E CONTRATOS/2020)

O total de 340 bolinhas, sendo 180 na cor branca e o restante na cor preta, será totalmente distribuído em sacolinhas, de forma que em cada uma tenha x unidades de bolinhas na cor branca e y unidades de bolinhas na cor preta. Se todas as sacolinhas deverão conter o menor número de bolinhas possível, a diferença $x - y$ deverá ser igual a:

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.

027. (Q3120621/IDHTEC/CÂMARA DE MACHADOS/AUXILIAR DE SERVIÇOS GERAIS/2024)

Em uma cidade, 240 guardas municipais e 180 bombeiros civis precisam fazer um curso de salvamento de pessoas em locais precários. Para tanto, todos os profissionais serão divididos em equipes contendo guardas e bombeiros, de modo que todas as equipes tenham o mesmo número de guardas e o mesmo número de bombeiros. Qual o valor máximo de equipes que se podem formar para a realização desse curso?

- a) 48
- b) 52
- c) 56
- d) 60
- e) 64

028. (Q3123181/FUNDATEC/PREFEITURA DE CRUZALTENSE/AUXILIAR DE SERVIÇOS GERAIS/2024)

Helena preparou 30 pastéis, 36 coxinhas e 42 croquetes para uma festa e quer distribuí-los nas bandejas de tal forma que todas as bandejas tenham o mesmo número de pastéis, coxinhas e croquetes. Quantas bandejas Helena poderá utilizar?

- a) 4.
- b) 5.
- c) 6.
- d) 7.
- e) 8.

029. (VUNESP/PREFEITURA DE SÃO PAULO-SP/ANALISTA DE PLANEJAMENTO E DESENVOLVIMENTO ORGANIZACIONAL/CIÊNCIAS CONTÁBEIS/2018) Quinze operários, todos com a mesma velocidade de trabalho, ensacam 1 260 sacos de 60 kg, em 7 horas. Sabe-se que os operários gastam 20% a menos de tempo para ensacar um saco de 40 kg em relação ao tempo gasto para ensacar um saco de 60 kg. Dessa maneira, o tempo necessário para que 12 desses operários ensaquem 2 100 sacos de 40 kg é igual a:

- a) 11 horas e 40 minutos.
- b) 12 horas e 20 minutos.
- c) 12 horas e 35 minutos.
- d) 11 horas e 55 minutos.
- e) 12 horas e 15 minutos.

030. (VUNESP/PREFEITURA DE SÃO BERNARDO DO CAMPO/GUARDA CIVIL MUNICIPAL/2023) Silmara possui 48 cartuchos de calibre.380 e pretende dividi-los em quantidades iguais, e sem sobrar nenhum, para guardá-los em caixas. Pretende fazer o mesmo com os 72 cartuchos de calibre 9 mm que possui. Silmara não misturará, em uma mesma caixa, cartuchos de calibres diferentes. Ademais, deseja que a quantidade de cartuchos de.380 por caixa seja a mesma que a quantidade de cartuchos de 9 mm por caixa, e, por fim, pretende acomodar a maior quantidade possível de cartuchos por caixa. Nessas condições, o número total de caixas que Silmara vai utilizar para guardar todos os cartuchos mencionados é igual a

- a) 24.
- b) 12.
- c) 8.
- d) 5.
- e) 4.

031. (VUNESP/CÂMARA DA ESTÂNCIA BALNEÁRIA DE ITANHAÉM-SP/AGENTE DE MANUTENÇÃO E ZELADORIA/2017) Num cruzamento entre duas avenidas, o fluxo de automóveis, na hora de tráfego intenso, é de, aproximadamente, 25 automóveis por minuto, seja norte/sul ou leste/oeste a cada abertura de sinal, que é de um minuto para cada sentido. Com a ajuda de uma equipe de trânsito, o fluxo passou a ser de, aproximadamente, 30 automóveis por

minuto. Então, com essa ajuda, por uma hora, o número de automóveis que passaram a mais nesse fluxo foi de:

- a) 300.
- b) 325.
- c) 350.
- d) 375.
- e) 400.

032. (FCC/SABESP/ENSINO MÉDIO TÉCNICO/2019) Cada um dos divisores positivos de 72 foi escrito em um cartão, de forma que em cada cartão foi escrito um único divisor e nenhum divisor foi escrito em mais de um cartão. Em seguida, esses cartões foram colocados em uma caixa. Sorteando-se um desses cartões, a probabilidade de ele conter um número múltiplo de 6 é

- a) $1/18$
- b) $1/12$
- c) $1/6$
- d) $1/4$
- e) $1/2$

033. (FCC/TRT 6ª REGIÃO-PE/ANALISTA JUDICIÁRIO-ÁREA ADMINISTRATIVA/2018) O número natural x possui ao todo três divisores positivos distintos. O número natural y possui ao todo três divisores positivos distintos. O produto $x.y$ é um número natural maior que 30 e menor que 40. A soma $x + y$ é igual a

- a) 12.
- b) 14.
- c) 13.
- d) 16.
- e) 19.

034. (FCC/SPPREV/TÉCNICO EM GESTÃO PREVIDENCIÁRIA/2019) Maria fez 2019 balas de coco de 5 sabores diferentes, sendo 392 puras, 400 com amendoim, 409 com abacaxi, 410 com recheio cremoso e 408 com chocolate. Ela deve fazer embalagens com 6 balas de um mesmo sabor. O número de balas que vão sobrar é:

- a) 7.
- b) 9.
- c) 8.
- d) 12.
- e) 6.

035. (FCC/METRÔ-SP/ANALISTA DESENVOLVIMENTO GESTÃO JÚNIOR-ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS/2019) Uma editora fará uma campanha distribuindo livros e canetas em estações de metrô. Serão distribuídos 1.620 livros e 2.940 canetas, de modo que cada estação de metrô participante da campanha receba a mesma quantidade de livros para distribuição e receba a mesma quantidade de canetas para distribuição. Para atingir o maior número de estações possível, a quantidade de canetas que cada estação deve receber é:

- a) 49
- b) 70
- c) 27
- d) 35
- e) 98

036. (FCC/DETRAN-SP/OFICIAL ESTADUAL DE TRÂNSITO/2019) Um pacote contém N balas. Sabe-se que $N \leq 29$ e que há 8 maneiras diferentes de dividir o número de balas do pacote em partes iguais, incluindo a divisão trivial em uma só parte contendo todas as N balas. Então, o resto da divisão de N por 5 é igual a

- a) 3.
- b) 1.
- c) 2.
- d) 4.
- e) 0.

037. (FCC/PREFEITURA DE RECIFE-PE/ANALISTA DE PLANEJAMENTO, ORÇAMENTO E GESTÃO/2019) Sejam 3 cidades (X , Y e Z) localizadas em uma determinada região. A cada 25 minutos sai um ônibus de X para Y e a cada 15 minutos sai um ônibus de X para Z . Sabe-se que às 8 horas e 30 minutos saiu um ônibus de X para Y e um ônibus de X para Z . O primeiro horário após o meio-dia em que vai sair um ônibus de X para Y e um ônibus de X para Z será às

- a) 12 horas e 30 minutos.
- b) 13 horas.
- c) 12 horas e 45 minutos.
- d) 12 horas e 15 minutos.
- e) 13 horas e 15 minutos.

038. (VUNESP/UNESP/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2016) Sejam x e y dois números naturais tais que $\text{MDC}(x, 105) = 1$, o $\text{MMC}(x, 21) = 168$ e o $\text{MDC}(x, y) = 4$. Então, sabendo que y é maior que x , porém é menor que o dobro de x , pode-se afirmar que y é igual a:

- a) 4
- b) 8
- c) 12
- d) 16
- e) 20

039. (Q3383664/VUNESP/PREFEITURA DE OSASCO/CONTADOR/2024) Uma instituição admitiu certo número de novos colaboradores, número esse compreendido entre 65 e 85. Esses novos colaboradores serão distribuídos em grupos, com a mesma quantidade de colaboradores em cada um, para a realização de um curso de formação. Essa divisão poderia ser feita em grupos com 18 ou com 24 colaboradores em cada, sendo que, em ambos os casos, nenhum colaborador ficaria fora de um grupo. Antes de se proceder à divisão, 3 outros colaboradores foram convocados para participar do curso, e a nova quantidade total de colaboradores foi dividida em uma quantidade mínima de grupos, todos com o mesmo número de colaboradores, número esse não superior a 30. O número de grupos formados foi igual a

- a) 2.
- b) 3.
- c) 4.
- d) 5.
- e) 6.

040. (Q3494734/FGV/PREFEITURA DE MACAÉ/ANALISTA PREVIDENCIÁRIO/2024) Um número inteiro positivo menor do que 100, deixa resto 6 quando dividido por 7, deixa resto 7 quando dividido por 8. Sendo assim, esse número é divisível por

- a) 17.
- b) 15.
- c) 13.
- d) 11.
- e) 10.

041. (Q3188392/VUNESP/PREFEITURA DE OSASCO/AUXILIAR DE DESENVOLVIMENTO INFANTIL/2024) Em uma avenida há 3 semáforos, A, B e C, cujos ciclos são, respectivamente, iguais a 45 segundos, 30 segundos e 50 segundos, sendo que um ciclo corresponde ao intervalo de tempo entre o momento em que a luz verde acende até o momento em que a luz verde acende novamente. Às 8 horas, os 3 semáforos iniciaram simultaneamente um ciclo, e foram contadas quantas vezes esses 3 semáforos iniciaram um ciclo simultaneamente no

período das 8 horas até às 10 horas. Não incluindo o ciclo iniciado às 8 horas, mas contando o ciclo iniciado às 10 horas, o número de ciclos iniciados simultaneamente foi

- a) 16.
- b) 14.
- c) 12.
- d) 10.
- e) 8.

042. (INÉDITA/2025) Um vendedor de frutas tinha em sua tenda 30 goiabas e 42 pinhas. Ele desejava fazer caixas que tivessem o mesmo número de goiabas e o mesmo número de pinhas. Sabendo que foi montado o maior número possível de caixas, o número de frutas que elas continham era:

- a) 8
- b) 10
- c) 12
- d) 15
- e) 16

043. (INÉDITA/2025) Bianca, Laís e Douglas tomam um determinado remédio em intervalos de dias distintos. Bianca toma remédio de 3 em 3 dias; Laís, de 4 em 4 dias; e Douglas toma remédio de 8 em 8 dias. Sabendo que todos tomam remédio independentemente do dia da semana e que na segunda-feira todos tomaram o remédio no mesmo dia, então o próximo dia em que todos tomarão remédio no mesmo dia será:

- a) Terça-feira.
- b) Quarta-feira.
- c) Quinta-feira.
- d) Sexta-feira.
- e) Sábado.

044. (INÉDITA/2025) Joaquim observou que, a cada 18 dias, chegava uma carta e que, a cada 24 dias, chegava um telegrama. Sabendo que ele recebeu uma carta e um telegrama ao mesmo tempo no dia 3 de abril, em que dia essa situação se repetirá?

- a) 5 de maio
- b) 18 de maio
- c) 31 de maio
- d) 14 de junho
- e) 3 de julho

045. (INÉDITA/2025) Em uma cesta de frutas, havia 36 pêssegos e 45 goiabas. Desejava-se construir pequenos pacotes, todos eles com o mesmo número de pêssegos e o mesmo número de goiabas, de modo que eles contenham a maior quantidade possível de cada fruta. O número de pacotes assim construídos é:

- a) 2
- b) 3
- c) 5
- d) 6
- e) 9

046. (INÉDITA/2024) Um vendedor dispunha de 36 maçãs e 54 peras. Ele desejava distribuí-las em diversas embalagens, todas elas contendo o mesmo número de maçãs e o mesmo número de peras. Sabendo que ele construiu o maior número possível de embalagens, assinale a alternativa que indica o número de frutas contidas em cada uma delas.

- a) 5
- b) 8
- c) 10
- d) 12
- e) 15

047. (Q3641981/FACET/PREFEITURA DE PEDRO VELHO/PROFESSOR/2025) Sejam x, y, z, w números inteiros tais que

$$xyzw = 2^6 3^9 5^7$$

e

i) $mmc(x, y) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

ii) $mmc(x, z) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

iii) $mmc(x, w) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

iv) $mmc(y, z) = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

v) $mmc(y, w) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

vi) $mmc(z, w) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

Qual é o máximo divisor comum entre x, y, z, w ?

- a) 3
- b) 6
- c) 15
- d) 30
- e) 45

GABARITO

- | | |
|-------|-------|
| 1. b | 36. d |
| 2. b | 37. d |
| 3. d | 38. c |
| 4. b | 39. b |
| 5. E | 40. d |
| 6. E | 41. a |
| 7. C | 42. c |
| 8. d | 43. c |
| 9. c | 44. d |
| 10. d | 45. e |
| 11. a | 46. a |
| 12. b | 47. a |
| 13. e | |
| 14. c | |
| 15. a | |
| 16. e | |
| 17. c | |
| 18. C | |
| 19. E | |
| 20. d | |
| 21. c | |
| 22. e | |
| 23. b | |
| 24. b | |
| 25. e | |
| 26. a | |
| 27. d | |
| 28. c | |
| 29. a | |
| 30. d | |
| 31. a | |
| 32. e | |
| 33. c | |
| 34. b | |
| 35. a | |

GABARITO COMENTADO

022. (Q3665779/AMAUC/PREFEITURA DE ALTO BELA VISTA/PROFESSOR II/2025) As luzes da decoração de Natal da praça de uma cidade piscam de forma sincronizada. As vermelhas piscam em intervalos de 5 segundos, as verdes piscam em intervalos de 8 segundos, as azuis piscam em intervalos de 12 segundos e as amarelas piscam em intervalos de 15 segundos. Sendo assim, qual é o intervalo de tempo entre os momentos em que todas as luzes piscam simultaneamente?

- a) O intervalo é de 30 segundos.
- b) O intervalo é de 40 segundos.
- c) O intervalo é de 50 segundos.
- d) O intervalo é de 3 minutos.
- e) O intervalo é de 2 minutos.



Para encontrar o intervalo de tempo entre os momentos em que todas as luzes piscam simultaneamente, precisamos determinar o mínimo múltiplo comum (MMC) dos tempos de piscar de cada cor:

- Luzes vermelhas: 5 segundos
- Luzes verdes: 8 segundos
- Luzes azuis: 12 segundos
- Luzes amarelas: 15 segundos

Façamos a fatoração conjunta.

5, 8, 12, 15	2
5, 4, 6, 15	2
5, 2, 3, 15	2
5, 1, 3, 15	3
5, 1, 1, 5	5
1, 1, 1, 1	= 2³.3.5 = 120

O menor intervalo de tempo para todas as luzes piscarem juntas novamente é 120 segundos (ou 2 minutos).

Letra e.

023. (VUNESP/PREFEITURA DE MORRO AGUDO-SP/AGENTE DO SETOR DE ÁGUA E ESGOTO/2020) Em uma palestra, estavam presentes 48 mulheres e 42 homens. Ao término dessa palestra,

todas essas pessoas foram divididas em grupos, para a realização de uma atividade, de modo que todos os grupos tenham o mesmo número de pessoas e na maior quantidade possível. Sabendo-se que não tinham homens e mulheres juntos, em um mesmo grupo, então o número de grupos formados somente com mulheres foi:

- a) 9.
- b) 8.
- c) 7.
- d) 6.
- e) 5.



Para encontrar o maior número de grupos formados por apenas mulheres e apenas homens, vamos utilizar o conceito de máximo divisor comum.

Vamos usar uma tabelinha para fatorar os números que representam a quantidade de homens e a quantidade de mulheres presentes na palestra:

48	42	2
24	21	2
12	21	2
6	21	2
3	21	3
1	7	7
	1	

Depois, separamos os fatores comuns – isto é, dividem ambos os números ao mesmo tempo – e os multiplicamos. Verificamos então que o MDC é dado por:

$$2 \cdot 3 = 6$$

Assim, nós obtemos:

$$\frac{48}{6} = 8 \text{ grupos de mulheres}$$

$$\text{e } \frac{42}{6} = 7 \text{ grupos de homens}$$

Portanto, serão 8 grupos apenas com mulheres.

Letra b.

024. (Q3204227/VUNESP/PREFEITURA DE OSASCO/PROFESSOR/2024) Sejam $\text{mmc}(A, B, C)$ o mínimo múltiplo comum de A , B e C , e $\text{mdc}(D, E, F)$ o máximo divisor comum de D , E e F , respectivamente. Sendo assim, $\text{mmc}(12, 18, 72)/\text{mdc}(28, 56, 108)$ é igual a

- a) 36.
- b) 18.
- c) 12.
- d) 9.
- e) 6.



Vamos usar o algoritmo da fatoração para calcular o $\text{mdc}(28, 56, 108)$.

28, 56, 108	2
14, 28, 54	2
7, 14, 27	<u>$= 2^2 = 4$</u>

Para calcular o $\text{mmc}(12, 18, 72)$, nem precisamos recorrer ao algoritmo, porque o 72 é divisível tanto por 12 quanto por 18. Então, o MMC entre os três números é igual a 72.

Portanto, a razão pedida é:

$$\frac{\text{mmc}(12, 18, 72)}{\text{mdc}(28, 56, 108)} = \frac{72}{4} = 18$$

Letra b.

025. (Q3117171/FGV/PREFEITURA DE CARAGUATATUBA/ELETRICISTA/2024) Em uma data comemorativa, Sr. Damião decidiu montar saquinhos de guloseimas para distribuir às crianças vizinhas. Para isso, tinha disponíveis 300 balas, 90 paçocas e 150 pirulitos.

Damião decidiu que cada saquinho devia conter balas, paçocas e pirulitos, distribuindo cada tipo de doce igualmente entre os saquinhos e sem que haja sobra de qualquer quantidade de doces. Decidiu ainda que distribuiria a maior quantidade possível de saquinhos.

Cada saquinho terá então as seguintes quantidades de balas, de paçocas e de pirulitos, respectivamente:

- a) 3, 5 e 10.
- b) 6, 2 e 3.
- c) 6, 3 e 5.
- d) 10, 5 e 3.
- e) 10, 3 e 5.



Para determinar a quantidade de doces em cada saquinho, precisamos dividir os 300 balas, 90 paçocas e 150 pirulitos em grupos iguais, de modo que não haja sobra. Para isso, o número de saquinhos deve ser o máximo divisor comum (MDC) dos três números.

Vamos, então, usar o algoritmo da fatoração para o MDC.

300, 90, 150	2
150, 45, 75	3
50, 15, 25	5
10, 3, 5	= 2.3.5 = 30

Portanto, haverá 30 saquinhos.

Como são 300 balas, 90 paçocas e 150 pirulitos para serem distribuídos em cada um dos 30 saquinhos, podemos concluir que cada saquinho terá 10 balas, 3 paçocas e 5 pirulitos.

Letra e.

026. (VUNESP/PREFEITURA DE MORRO AGUDO-SP/AGENTE DE LICITAÇÕES E CONTRATOS/2020)

O total de 340 bolinhas, sendo 180 na cor branca e o restante na cor preta, será totalmente distribuído em sacolinhas, de forma que em cada uma tenha x unidades de bolinhas na cor branca e y unidades de bolinhas na cor preta. Se todas as sacolinhas deverão conter o menor número de bolinhas possível, a diferença $x - y$ deverá ser igual a:

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.



Como as sacolinhas devem conter o menor número de bolinhas possível, precisamos descobrir qual o maior número de sacolinhas podemos obter, então temos aqui uma questão de máximo divisor comum.

Para encontrar esse valor, vamos fatorar a quantidade de bolinhas brancas e bolinhas pretas. Das 340 bolinhas, 180 são brancas e as restantes são pretas, então temos:

$$340 - 180 = 160 \text{ bolinhas pretas}$$

180	160	2
90	80	2
45	40	2
45	20	2
45	10	2
45	5	3
15	5	3
5	5	5
1	1	

Nossos fatores comuns são 2, 2 e 5, então basta multiplicá-los para encontrarmos nosso MDC:

$$MDC = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

Assim, em cada sacolinha, teremos:

$$x = \frac{180}{20} = 9 \text{ bolinhas brancas}$$

$$y = \frac{160}{20} = 8 \text{ bolinhas pretas}$$

Portanto:

$$x - y = 9 - 8 = 1$$

Letra a.

027. (Q3120621/IDHTEC/CÂMARA DE MACHADOS/AUXILIAR DE SERVIÇOS GERAIS/2024)

Em uma cidade, 240 guardas municipais e 180 bombeiros civis precisam fazer um curso de salvamento de pessoas em locais precários. Para tanto, todos os profissionais serão divididos em equipes contendo guardas e bombeiros, de modo que todos as equipes tenham o mesmo número de guardas e o mesmo número de bombeiros. Qual o valor máximo de equipes que se podem formar para a realização desse curso?

- a) 48
- b) 52
- c) 56
- d) 60
- e) 64



Como a equipe tem que o mesmo número de guardas e o mesmo número de bombeiros, o número de equipes deve ser o máximo divisor comum (MDC) entre o número de guardas e de bombeiros.

240, 180	2
120, 90	2
60, 45	3
20, 15	5
4, 3	$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Portanto, serão formadas 60 equipes, cada uma delas com 4 guardas municipais e 3 bombeiros civis.

Letra d.

028. (Q3123181/FUNDATEC/PREFEITURA DE CRUZALTENSE/AUXILIAR DE SERVIÇOS GERAIS/2024) Helena preparou 30 pastéis, 36 coxinhas e 42 croquetes para uma festa e quer distribuí-los nas bandejas de tal forma que todas as bandejas tenham o mesmo número de pastéis, coxinhas e croquetes. Quantas bandejas Helena poderá utilizar?

- a) 4.
- b) 5.
- c) 6.
- d) 7.
- e) 8.



Para que todas as bandejas tenham o mesmo número de pastéis, coxinhas e croquetes, o número de bandejas deve ser o MDC entre os números de cada uma dessas guloseimas. Vamos utilizar o algoritmo da fatoração.

30, 36, 42	2
15, 18, 21	3
5, 6, 7	$= 2 \cdot 3 = 6$

Portanto, o número máximo de bandejas que Helena pode utilizar é igual a 6, sendo que cada uma terá 5 pastéis, 6 coxinhas e 7 croquetes, totalizando 30 pastéis, 36 coxinhas e 42 croquetes.

Letra c.

029. (VUNESP/PREFEITURA DE SÃO PAULO-SP/ANALISTA DE PLANEJAMENTO E DESENVOLVIMENTO ORGANIZACIONAL/CIÊNCIAS CONTÁBEIS/2018) Quinze operários, todos com a mesma velocidade de trabalho, ensacam 1 260 sacos de 60 kg, em 7 horas. Sabe-se que os operários gastam 20% a menos de tempo para ensacar um saco de 40 kg em relação ao tempo gasto para ensacar um saco de 60 kg. Dessa maneira, o tempo necessário para que 12 desses operários ensaquem 2 100 sacos de 40 kg é igual a:

- a) 11 horas e 40 minutos.
- b) 12 horas e 20 minutos.
- c) 12 horas e 35 minutos.
- d) 11 horas e 55 minutos.
- e) 12 horas e 15 minutos.



Como os operários gastam 20% a menos de tempo para ensacar sacos de 40kg, se para ensacar 1.260 sacos de 60kg levam 7 horas, para ensacar 1.260 sacos de 40kg levariam 80% de 7 horas:

$$0,8 \cdot 7 = 5,6 \text{ horas}$$

Assim, podemos montar uma regra de três composta:

Quantidade de Sacos	Número de Operários	Tempo em Horas
1.260	15	5,6
2.100	12	x

Por padrão, apontamos a setinha da variável a ser encontrada para baixo.

Quanto maior o número de operários, menor o tempo em horas, portanto o sentido da seta é inverso ao de x.

Já em relação à quantidade de sacos, quanto mais sacos, mais tempo em horas se leva, assim a seta fica na mesma direção de x.

Como o número de operários é inversamente proporcional, nós invertemos a fração, e assim ficamos com:

$$\frac{5,6}{x} = \frac{12}{15} \cdot \frac{1260}{2100}$$

$$\frac{5,6}{x} = \frac{12}{25}$$

$$\begin{aligned} 5,6 \cdot 25 &= 12 \cdot x \\ 12x &= 140 \\ x &= \frac{140}{12} = 11,67 = 11 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Como cada hora possui 60 minutos:

$$\frac{2}{3} \cdot 60 = 40$$

Desse modo, para ensacar 2.100 sacos de 40kg, 12 operadores levariam 11 horas e 40 minutos.

Letra a.

030. (VUNESP/PREFEITURA DE SÃO BERNARDO DO CAMPO/GUARDA CIVIL MUNICIPAL/2023) Silmara possui 48 cartuchos de calibre.380 e pretende dividi-los em quantidades iguais, e sem sobrar nenhum, para guardá-los em caixas. Pretende fazer o mesmo com os 72 cartuchos de calibre 9 mm que possui. Silmara não misturará, em uma mesma caixa, cartuchos de calibres diferentes. Ademais, deseja que a quantidade de cartuchos de.380 por caixa seja a mesma que a quantidade de cartuchos de 9 mm por caixa, e, por fim, pretende acomodar a maior quantidade possível de cartuchos por caixa. Nessas condições, o número total de caixas que Silmara vai utilizar para guardar todos os cartuchos mencionados é igual a

- a) 24.
- b) 12.
- c) 8.
- d) 5.
- e) 4.



Como cada caixa deve ter o mesmo número de cartuchos, o número de cartuchos em cada caixa deve ser um divisor comum entre 48 e 72. Além disso, como Silmara quer colocar a maior quantidade possível, ela vai utilizar o MDC (máximo divisor comum) entre os dois números. Assim, temos:

48, 72	2	
24, 36	2	
12, 18	2	
6, 9	3	
2, 3		
		$= 2^3 \cdot 3 = 24$

Portanto, cada caixa terá 24 cartuchos. Desse modo, serão 2 caixas com 24 cartuchos.380 e 3 caixas com 24 cartuchos de calibre 9 mm cada. Então, o número total de caixas que Silmara precisará é:

$$\#Caixas = 2 + 3 = 5$$

Letra d.

031. (VUNESP/CÂMARA DA ESTÂNCIA BALNEÁRIA DE ITANHAÉM-SP/AGENTE DE MANUTENÇÃO E ZELADORIA/2017) Num cruzamento entre duas avenidas, o fluxo de automóveis, na hora de tráfego intenso, é de, aproximadamente, 25 automóveis por minuto, seja norte/sul ou leste/oeste a cada abertura de sinal, que é de um minuto para cada sentido. Com a ajuda de uma equipe de trânsito, o fluxo passou a ser de, aproximadamente, 30 automóveis por minuto. Então, com essa ajuda, por uma hora, o número de automóveis que passaram a mais nesse fluxo foi de:

- a) 300.
- b) 325.
- c) 350.
- d) 375.
- e) 400.



Vamos calcular primeiramente quantos automóveis passavam em 1h antes da ajuda:

Automóveis	Minutos
25	1
x	60

Multiplicando cruzado:

$$x = 60 \cdot 25 = 1.500$$

Agora, vamos calcular o número de automóveis que passavam em 1h depois da ajuda:

Automóveis	Minutos
30	1
y	60

Multiplicando cruzado:

$$y = 60 \cdot 30 = 1.800$$

Por fim, podemos calcular a diferença:

$$y - x = 1.800 - 1.500 = 300$$

Nesse novo fluxo, passaram 300 automóveis a mais.

Letra a.

032. (FCC/SABESP/ENSINO MÉDIO TÉCNICO/2019) Cada um dos divisores positivos de 72 foi escrito em um cartão, de forma que em cada cartão foi escrito um único divisor e nenhum divisor foi escrito em mais de um cartão. Em seguida, esses cartões foram colocados em uma caixa. Sorteando-se um desses cartões, a probabilidade de ele conter um número múltiplo de 6 é

- a) $1/18$
- b) $1/12$
- c) $1/6$
- d) $1/4$
- e) $1/2$



Para determinar os divisores de 72, podemos fazer a fatoração em fatores primos desse número:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	$= 2^3 \cdot 3^2$

Então, os divisores de 72 são:

	3^0	3^1	3^2
2^0	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 3 = 3$	$1 \cdot 9 = 9$
2^1	$2 \cdot 1 = 2$	$2 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 9 = 18$
2^2	$4 \cdot 1 = 4$	$4 \cdot 3 = 12$	$4 \cdot 9 = 36$
2^3	$8 \cdot 1 = 8$	$8 \cdot 3 = 24$	$8 \cdot 9 = 72$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

Dentre esses divisores, são múltiplos de 6:

$$D_6 = \{6, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

Portanto, são 6 múltiplos de 6 dentre um total de 12 divisores de 72. Assim, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{\#favoráveis}{\#totais} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Letra e.

033. (FCC/TRT 6ª REGIÃO-PE/ANALISTA JUDICIÁRIO-ÁREA ADMINISTRATIVA/2018) O número natural x possui ao todo três divisores positivos distintos. O número natural y possui ao todo três divisores positivos distintos. O produto $x \cdot y$ é um número natural maior que 30 e menor que 40. A soma $x + y$ é igual a

- a) 12.
- b) 14.
- c) 13.
- d) 16.
- e) 19.



Um número inteiro possui 3 divisores quando é da forma:

$$N = p^2$$

Nesse caso, os divisores são $\{1, p, p^2\}$. Por exemplo, tome o número $N = 2^2 = 4$. Os divisores de 4 são:

$$\{1, 2, 4\}$$

Dessa forma, podemos fazer $x = 4$. Como produto de $xy > 30$, o valor de y não pode ser igual a 4, mas pode ser igual a 9, porque:

$$xy = 4 \cdot 9 = 36 > 30$$

$$\text{Divisores de } y = \{1, 3, 9\}$$

Desse modo, a soma pedida será:

$$S = x + y = 4 + 9 = 13$$

Letra c.

034. (FCC/SPPREV/TÉCNICO EM GESTÃO PREVIDENCIÁRIA/2019) Maria fez 2019 balas de coco de 5 sabores diferentes, sendo 392 puras, 400 com amendoim, 409 com abacaxi, 410

com recheio cremoso e 408 com chocolate. Ela deve fazer embalagens com 6 balas de um mesmo sabor. O número de balas que vão sobrar é:

- a) 7.
- b) 9.
- c) 8.
- d) 12.
- e) 6.



Como as embalagens vão ser sempre com 6 unidades de balas do mesmo sabor, devemos utilizar o algoritmo da divisão para saber o resto de cada uma das quantidades de balas:

$$\begin{array}{r} 392 \quad | \quad 6 \\ -390 \quad 65 \\ (2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 400 \quad | \quad 6 \\ -396 \quad 66 \\ (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 409 \quad | \quad 6 \\ -408 \quad 68 \\ (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 410 \quad | \quad 6 \\ -408 \quad 68 \\ (2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 408 \quad | \quad 6 \\ -408 \quad 68 \\ (0) \end{array}$$

Portanto, sobram 2 balas de coco, 4 balas de amendoim, 1 bala de abacaxi e 2 balas de recheio cremoso. Assim, o total de balas que vão sobrar:

$$N = 2 + 4 + 1 + 2 = 9$$

Letra b.

035. (FCC/METRÔ-SP/ANALISTA DESENVOLVIMENTO GESTÃO JÚNIOR-ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS/2019) Uma editora fará uma campanha distribuindo livros e canetas em estações de metrô. Serão distribuídos 1.620 livros e 2.940 canetas, de modo que cada estação de metrô participante da campanha receba a mesma quantidade de livros para distribuição e receba a mesma quantidade de canetas para distribuição. Para atingir o maior número de estações possível, a quantidade de canetas que cada estação deve receber é:

- a) 49
- b) 70
- c) 27
- d) 35
- e) 98



Como os livros e as canetas devem ser divididos em quantidades iguais entre os participantes, devemos tomar o máximo divisor comum (MDC) entre o número de livros e de canetas:

1620, 2940	2
810, 1470	2
405, 735	3
135, 245	5
27, 49	$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Desse modo, é possível fazer 60 pacotes com 27 livros e 49 canetas cada um.

Letra a.

036. (FCC/DETRAN-SP/OFFICIAL ESTADUAL DE TRÂNSITO/2019) Um pacote contém N balas. Sabe-se que $N \leq 29$ e que há 8 maneiras diferentes de dividir o número de balas do pacote em partes iguais, incluindo a divisão trivial em uma só parte contendo todas as N balas. Então, o resto da divisão de N por 5 é igual a

- a) 3.
- b) 1.
- c) 2.
- d) 4.
- e) 0.



Observe que N tem 8 divisores. Sabemos que, se a fatoração de um número é:

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

$$D = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1) = 8$$

Como o número de divisores é 8, podemos escrever o 8 de várias formas:

$$(I) \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$(II) \quad 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$$

$$(III) \quad 8 \cdot 1 \cdot 1 = 8$$

Desse modo, como queremos $N \leq 29$, vamos tomar os menores primos possíveis na fatoração de N . Assim, teremos pelas possibilidades:

$$(I) \quad 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30$$

$$(II) \quad 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 24$$

$$(III) \quad 2^7 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 128$$

Desse modo, N só pode ser igual a 24. Logo, o resto da divisão de N por 5 é:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 5 \\ -20 & 4 \\ \hline & (4) \end{array}$$

Portanto, o resto da divisão de N por 5 é igual a 4.

Letra d.

037. (FCC/PREFEITURA DE RECIFE-PE/ANALISTA DE PLANEJAMENTO, ORÇAMENTO E GESTÃO/2019) Sejam 3 cidades (X, Y e Z) localizadas em uma determinada região. A cada 25 minutos sai um ônibus de X para Y e a cada 15 minutos sai um ônibus de X para Z. Sabe-se que às 8 horas e 30 minutos saiu um ônibus de X para Y e um ônibus de X para Z. O primeiro horário após o meio-dia em que vai sair um ônibus de X para Y e um ônibus de X para Z será às

- a) 12 horas e 30 minutos.
- b) 13 horas.
- c) 12 horas e 45 minutos.
- d) 12 horas e 15 minutos.
- e) 13 horas e 15 minutos.



Como os ônibus XY e XZ saem a cada 25 e 15 minutos, respectivamente, acontecerão coincidências de horários a cada MMC entre esses dois números:

$$\begin{array}{r|l} 25, 15 & 3 \\ 25, 5 & 5 \\ 5, 1 & 5 \\ \hline 1, 1 & = 3 \cdot 5 = 15 \end{array}$$

Desse modo, a cada 15 minutos, acontecerá uma nova coincidência de horários entre os dois ônibus.

Como queremos saber a primeira coincidência após o meio-dia, devemos calcular o intervalo entre 8h30 e 12h em minutos:

$$t = 12 - 8,5 = 3,5h$$

Podemos converter para minutos:

$$t = 3,5 \cdot 60 = 210$$

Precisamos, então, saber o primeiro múltiplo de 75 que excede 210. Para isso, podemos usar o algoritmo da divisão:

$$\begin{array}{r|l} 210 & 75 \\ -150 & 2 \\ \hline & (60) \end{array}$$

Para saber a primeira coincidência de horários, devemos multiplicar o divisor por 3, que é maior que 2:

$$T = 75 \cdot 3 = 225$$

Então, devem passar 225 minutos desde as 8h30. Vamos converter em horas e minutos. Para isso, basta dividir por 60:

$$\begin{array}{r|l} 225 & 60 \\ -180 & 3 \\ \hline & (45) \end{array}$$

Portanto, a coincidência de horários acontecerá após 3 horas e 45 minutos depois das 8h30. Dessa forma, a hora será:

$$H = 8h + 30min + 3h + 45min = 11h + 75min$$

Podemos, por fim, converter os 75 minutos em 1 hora e 15 minutos:

$$H = 11h + 1h + 15min = 12h + 15min$$

Letra d.

038. (VUNESP/UNESP/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2016) Sejam x e y dois números naturais tais que $\text{MDC}(x, 105) = 1$, o $\text{MMC}(x, 21) = 168$ e o $\text{MDC}(x, y) = 4$. Então, sabendo que y é maior que x , porém é menor que o dobro de x , pode-se afirmar que y é igual a:

- a) 4
- b) 8
- c) 12
- d) 16
- e) 20



Essa é uma questão bem interessante para você pensar a respeito de alguns conceitos. Quando a questão nos diz que $\text{MDC}(x, 105) = 1$, isso significa que x e 105 são primos entre si. Logo, não possuem fatores primos comuns.

A decomposição de 105 em fatores primos é:

105	3
35	5
7	7
1	$= 3 \cdot 5 \cdot 7$

Portanto, os fatores primos de 105 são 3, 5 e 7.

O MMC entre x e 21 é igual a 168. Vejamos os fatores primos de 168:

168	2
84	2
42	2
21	$= 2^3 \cdot 3$

Observe que x e 21 são primos entre si, porque $21 = 3 \cdot 7$ e x não pode ter nem 3 nem 7 como fatores primos.

Dessa maneira, concluímos que $x = 2^3 = 8$.

Agora, temos que o MDC entre x e y é igual a 4. Como y é maior que 8 e menor que 16 (pelo enunciado), podemos testar $y = 12$.

8, 12	2
4, 6	2
2, 3	$= 2^3 \cdot 3$

De fato, o MDC entre 8 e 12 é igual a 4. Portanto, $y = 12$.

Letra c.

039. (Q3383664/VUNESP/PREFEITURA DE OSASCO/CONTADOR/2024) Uma instituição admitiu certo número de novos colaboradores, número esse compreendido entre 65 e 85. Esses novos colaboradores serão distribuídos em grupos, com a mesma quantidade de colaboradores em cada um, para a realização de um curso de formação. Essa divisão poderia ser feita em grupos com 18 ou com 24 colaboradores em cada, sendo que, em ambos os casos, nenhum colaborador ficaria fora de um grupo. Antes de se proceder à divisão, 3 outros colaboradores foram convocados para participar do curso, e a nova quantidade total de colaboradores foi dividida em uma quantidade mínima de grupos, todos com o mesmo número de colaboradores, número esse não superior a 30. O número de grupos formados foi igual a

- a) 2.
- b) 3.
- c) 4.
- d) 5.
- e) 6.



Como os colaboradores poderiam divididos em grupos de 18 colaboradores ou grupos de 24, podemos concluir que o número total de colaboradores é um múltiplo desses dois números. Vamos calcular o MMC entre esses dois números.

18, 24	2
9, 12	2
9, 6	2
9, 3	3
3, 1	3
1, 1	$= 2^3 \cdot 3^2 = 72$

Como o MMC entre 18 e 24 é igual a 72, podemos concluir que o número total de colaboradores da instituição é múltiplo de 72. Como esse número deve estar entre 65 e 85, o número de colaboradores é igual a 72.

Foram adicionados 3 colaboradores ao grupo, atingindo 75. Vamos fatorar esse número e encontrar seus divisores

75	3
25	5
5	5
1	$= 3 \cdot 5^2 = 75$

Assim, podemos concluir que os divisores de 75 são {1, 3, 5, 15, 25, 75}. Logo, o maior divisor de 75 que não excede 30 é o 25.

Portanto, os 75 colaboradores podem ser divididos em 3 grupos, cada um deles contendo 25. Portanto, o número mínimo de grupos é igual a 3.

Letra b.

040. (Q3494734/FGV/PREFEITURA DE MACAÉ/ANALISTA PREVIDENCIÁRIO/2024) Um número inteiro positivo menor do que 100, deixa resto 6 quando dividido por 7, deixa resto 7 quando dividido por 8. Sendo assim, esse número é divisível por

- a) 17.
- b) 15.
- c) 13.
- d) 11.
- e) 10.



Seja N o número do enunciado. Como N deixa resto 6 na divisão por 7, podemos concluir que $N + 1$ é divisível por 7.

Isso acontece, porque, se N deixa resto 6 na divisão por 7, ele pode ser escrito como:

$$N = 7q + 6$$

$$\therefore N + 1 = 7q + 7 = 7 \cdot (q + 1)$$

Então, de fato, $N + 1$ é divisível por 7.

Por outro lado, como N deixa resto 7 quando dividido por 8, podemos concluir que $N + 1$ é também divisível por 8.

Desse modo, $N + 1$ é divisível simultaneamente por 7 e por 8. Logo, ele é divisível pelo MMC entre esses dois números. Como 7 e 8 são primos entre si, o MMC entre esses dois números é igual ao produto deles, no caso, $7 \cdot 8 = 56$.

Como N deve ser menor que 100, $N + 1$ deve ser menor que 101, e, ao mesmo tempo, deve ser múltiplo de 56, a única possibilidade é que N seja igual a 56, pois o próximo múltiplo de 56 seria o 112, que já é maior que 101. Desse modo, podemos concluir o valor de N :

$$N + 1 = 56$$

$$\therefore N = 56 - 1 = 55$$

Portanto, N é divisível tanto por 5 quanto por 11.

Letra d.

041. (Q3188392/VUNESP/PREFEITURA DE OSASCO/AUXILIAR DE DESENVOLVIMENTO INFANTIL/2024) Em uma avenida há 3 semáforos, A, B e C, cujos ciclos são, respectivamente, iguais a 45 segundos, 30 segundos e 50 segundos, sendo que um ciclo corresponde ao intervalo de tempo entre o momento em que a luz verde acende até o momento em que a luz verde acende novamente. Às 8 horas, os 3 semáforos iniciaram simultaneamente um ciclo, e foram contadas quantas vezes esses 3 semáforos iniciaram um ciclo simultaneamente no período das 8 horas até às 10 horas. Não incluindo o ciclo iniciado às 8 horas, mas contando o ciclo iniciado às 10 horas, o número de ciclos iniciados simultaneamente foi

- a) 16.
- b) 14.
- c) 12.
- d) 10.
- e) 8.



Os 3 semáforos piscarão juntos novamente a cada MMC dos tempos dos seus ciclos isolados.

45, 30, 50	2
45, 15, 25	3
15, 5, 25	3
5, 5, 25	5
1, 1, 5	5
1, 1, 1	$= 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$

Portanto, as luzes piscam juntas a cada 450 segundos. Em minutos, esse tempo corresponde a:

$$t = \frac{450}{60} = 7,5 \text{ minutos}$$

O intervalo das 8 às 10h tem 2 horas. Como cada hora tem 60 minutos, esse intervalo tem 120 minutos. Então, o número de piscadas conjuntas dos três semáforos é:

$$N = \frac{120}{7,5} = \frac{240}{15} = 16$$

Letra a.

042. (INÉDITA/2025) Um vendedor de frutas tinha em sua tenda 30 goiabas e 42 pinhas. Ele desejava fazer caixas que tivessem o mesmo número de goiabas e o mesmo número de pinhas. Sabendo que foi montado o maior número possível de caixas, o número de frutas que elas continham era:

- a) 8
- b) 10
- c) 12
- d) 15
- e) 16



Como queremos que todas as caixas tenham a mesma quantidade de frutas de cada tipo, precisamos calcular o MDC entre 30 e 42:

30, 42	2
15, 21	3
5, 7	= 2.3 = 6

Portanto, o maior número possível de caixas que se pode montar é igual a 6 caixas. Cada caixa terá 5 goiabas e 7 pinhas. Desse modo, o total de frutas contidas nelas é igual a 12.

Letra c.

043. (INÉDITA/2025) Bianca, Laís e Douglas tomam um determinado remédio em intervalos de dias distintos. Bianca toma remédio de 3 em 3 dias; Laís, de 4 em 4 dias; e Douglas toma remédio de 8 em 8 dias. Sabendo que todos tomam remédio independentemente do dia da semana e que na segunda-feira todos tomaram o remédio no mesmo dia, então o próximo dia em que todos tomarão remédio no mesmo dia será:

- a) Terça-feira.
- b) Quarta-feira.
- c) Quinta-feira.
- d) Sexta-feira.
- e) Sábado.



Note que procuramos um dia em comum mais próximo possível para as três pessoas tomarem remédio. Logo, estamos falando de mínimo múltiplo comum ou MMC.

Calculando o MMC entre 3, 4 e 8, temos:

MMC ENTRE 3, 4 e 8



Assim, sabemos que o próximo dia em que todos tomarão o remédio ao mesmo tempo será 24 dias após a segunda-feira. Dividindo esse total pela quantidade de dias na semana, temos:

$$X = \frac{\text{Total}}{\text{Número de dias em 1 semana}} \rightarrow X = \frac{24}{7}$$

A divisão não é exata e temos 3 de resto. Logo, o próximo dia será 3 dias após segunda-feira:

$$\text{Dia final} = (\text{segunda} - \text{feira}) + 3 \text{ dias}$$

Isto é:



$$\therefore \text{Dia final} = \text{Quinta} - \text{feira}$$

Letra c.

044. (INÉDITA/2025) Joaquim observou que, a cada 18 dias, chegava uma carta e que, a cada 24 dias, chegava um telegrama. Sabendo que ele recebeu uma carta e um telegrama ao mesmo tempo no dia 3 de abril, em que dia essa situação se repetirá?

- a) 5 de maio
- b) 18 de maio
- c) 31 de maio
- d) 14 de junho
- e) 3 de julho



A situação se repetirá no dia correspondente ao mínimo múltiplo comum entre 18 e 24:

18, 24	2
9, 12	2
9, 6	2
9, 3	3
3, 1	3
1, 1	$= 2^3 \cdot 3^2 = 72$

Desse modo, a situação só se repetirá depois de 72 dias. Note que:

- abril tem 30 dias;
- maio tem 31 dias;
- sobram ainda mais 11 dias para completar os 72.

Então, a situação se repete no dia $3 + 11 = 14$ do mês de junho.

Letra d.

045. (INÉDITA/2025) Em uma cesta de frutas, havia 36 pêssegos e 45 goiabas. Desejava-se construir pequenos pacotes, todos eles com o mesmo número de pêssegos e o mesmo número de goiabas, de modo que eles contenham a maior quantidade possível de cada fruta. O número de pacotes assim construídos é:

- a) 2
- b) 3
- c) 5
- d) 6
- e) 9



Vamos calcular o máximo divisor comum entre 36 e 45:

36, 45	3
12, 15	3
4, 5	$= 3^2$

Assim, o MDC entre 36 e 45 é igual a $3^2 = 9$. Desse modo, é possível construir 9 pacotes. Esses pacotes terão 4 pêssegos e 5 goiabas.

Letra e.

046. (INÉDITA/2024) Um vendedor dispunha de 36 maçãs e 54 peras. Ele desejava distribuí-las em diversas embalagens, todas elas contendo o mesmo número de maçãs e o mesmo número de peras. Sabendo que ele construiu o maior número possível de embalagens, assinale a alternativa que indica o número de frutas contidas em cada uma delas.

- a) 5
- b) 8
- c) 10
- d) 12
- e) 15



Como queremos que as caixas tenham a maior quantidade possível de frutas, devemos tomar o MDC entre elas:

36, 54	2
18, 27	3
6, 9	3
2, 3	$= 2 \cdot 3^2 = 18$

Desse modo, ele será capaz de fazer 18 caixas, cada uma delas contendo 2 maçãs e 3 peras, portanto cada caixa terá 5 frutas.

Letra a.

047. (Q3641981/FACET/PREFEITURA DE PEDRO VELHO/PROFESSOR/2025) Sejam x, y, z, w números inteiros tais que

$$xyzw = 2^6 3^9 5^7$$

e

i) $mmc(x, y) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

ii) $mmc(x, z) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

iii) $mmc(x, w) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

iv) $mmc(y, z) = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

v) $mmc(y, w) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

vi) $mmc(z, w) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

Qual é o máximo divisor comum entre x, y, z, w ?

- a) 3
- b) 6
- c) 15
- d) 30
- e) 45



Essa foi uma das questões mais difíceis que eu já vi na história dos concursos públicos sobre o tema. Nessa questão, para facilitar a notação, usaremos em alguns momentos o símbolo “=” para representar divisível. Assim, quando disseram $xyzw = 2^6$, entenda que $xyzw$ é divisível por 2^6 , mas não é divisível por 2^7 .

O máximo divisor comum (MDC) de x,y,z,w corresponde ao menor expoente comum de cada fator primo presente nos números x,y,z,w , levando em conta os dados fornecidos.

Vamos examinar cada fator primo separado. Primeiramente, vamos estudar o fator 2 entre os números envolvidos na questão.

O mmc entre dois números, por sua vez, corresponde ao maior expoente comum de cada fator primo. Como sabemos que o mmc (y,z) inclui 2^1 , podemos concluir que, entre y e z , o expoente máximo na fatoração por 2 é igual a 1.

Mas, sabemos, ainda, que o mmc (x,y) inclui o fator 2^3 . Como o y é, no máximo, divisível por 2^1 , podemos concluir que x é divisível por 2^3 .

Analogamente, como o mmc (z,w) inclui o fator 2^2 e o fator de z é, no máximo, 2^1 , podemos concluir que w é divisível por 2^2 .

Assim, levando em conta que o produto $xyzw$ é divisível por 2^6 , que, como x é divisível por 2^3 , w é divisível por 2^2 , podemos concluir que o produto yz é:

$$\begin{aligned}xyzw &= 2^6 \\2^3 \cdot yz \cdot 2^2 &= 2^6 \\ \therefore yz &= \frac{2^6}{2^3 \cdot 2^2} = \frac{2^6}{2^5} = 2\end{aligned}$$

Portanto, o produto yz é divisível apenas por 2^1 . Assim, podemos concluir que um deles é divisível por 2^1 e o outro não é divisível por 2.

Desse modo, 2 não é um fator comum aos quatro números, logo, ele não é um fator do mdc (x,y,z,w) . Assim, podemos eliminar todas as alternativas que contêm números pares. Vamos estudar o fator 3 agora.

Como mmc (x,y) inclui o fator 3^2 , podemos concluir que o máximo expoente de 3 entre x e y é igual a 3^2 .

Mas, veja que mmc (x,z) inclui o fator 3^3 e o maior expoente possível para x é 3^2 , podemos concluir que z deve ser divisível por 3^3 .

Da mesma forma, como o mmc (y,w) inclui o fator 3^3 e o maior expoente possível para w é 3^2 , podemos concluir que w é divisível por 3^3 .

Por fim, como o produto $xyzw$ é divisível por 3^9 , podemos dizer sobre o produto xy :

$$\begin{aligned}xyzw &= 3^9 \\xy \cdot 3^3 \cdot 3^3 &= 3^9 \\ \therefore xy &= \frac{3^9}{3^3 \cdot 3^3} = 3^{9-3-3} = 3^3\end{aligned}$$

O produto xy é divisível por 3^3 . Porém, no máximo, esses números podem ser divisíveis por 3^2 . Então, podemos concluir que um deles é divisível somente por 3^1 e o outro é divisível por 3^2 . Desse modo, todos os números x , y , z e w são divisíveis por 3^1 . Logo, 3 é um divisor comum entre x , y , z e w e será um dos fatores do MDC entre os quatro números.

Por fim, vamos estudar o fator 5.

Veja que o $\text{mmc}(y,z)$, o $\text{mmc}(y,w)$ e o $\text{mmc}(z,w)$ incluem o fator 5^2 , portanto, o maior expoente possível entre y , w e z na divisão por 5 é 5^2 .

Mas, o $\text{mmc}(x,y)$ inclui o fator 5^3 e y não pode ser divisível por 5^3 , podemos concluir que x deve ser divisível por 5^3 .

Como sabemos que o produto $xyzw$ é divisível por 5^7 , podemos concluir sobre o produto yzw :

$$\begin{aligned}xyzw &= 5^7 \\5^3 \cdot yzw &= 5^7 \\ \therefore yzw &= \frac{5^7}{5^3} = 5^4\end{aligned}$$

Portanto, o produto yzw é divisível por 5^4 . Mas, sabemos que o MMC entre cada par inclui o fator 5^2 .

A única forma de atender à essas duas condições é que dois dos número y , z e w sejam divisíveis por 5^2 e um deles não seja divisível por 5.

Para exemplificar, considere que y e z sejam divisível 5^2 e que w não seja divisível por 5.

Nesse caso, teremos $\text{mmc}(y,z) = 5^2$, $\text{mmc}(y,w) = 5^2$ e $\text{mmc}(z,w) = 5^2$.

Por outro lado, se y for divisível por 5^2 , mas z e w forem divisíveis por 5^1 , realmente o produto yzw será divisível por 5^4 , mas o $\text{mmc}(z,w)$ seria divisível apenas por 5^1 , e não por 5^2 , como imposto pelo enunciado.

Assim, podemos concluir que, ao menos um dos números x , y , z e w não é divisível por 5.

Desse modo, o único fator presente no mdc entre x , y , z e w é igual a 3^1 . Logo, o MDC entre os quatro números é igual a 3.

Letra a.

Abra



caminhos



crie

futuros

gran.com.br

