

RACIOCÍNIO LÓGICO

Análise Combinatória



Livro Eletrônico

Presidente: Gabriel Granjeiro

Vice-Presidente: Rodrigo Calado

Diretor Pedagógico: Erico Teixeira

Diretora de Produção Educacional: Vivian Higashi

Gerente de Produção Digital: Bárbara Guerra

Coordenadora Pedagógica: Élica Lopes

Todo o material desta apostila (incluindo textos e imagens) está protegido por direitos autorais do Gran Cursos Online. Será proibida toda forma de plágio, cópia, reprodução ou qualquer outra forma de uso, não autorizada expressamente, seja ela onerosa ou não, sujeitando-se o transgressor às penalidades previstas civil e criminalmente.

CÓDIGO:

230710393846



THIAGO CARDOSO

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.

GRAN
CONCURSOS

SUMÁRIO

Apresentação	4
Análise Combinatória	5
1. Princípio Fundamental da Contagem.....	5
1.1. Princípio da Casa dos Pombos.....	10
1.2. Princípio da Inclusão e Exclusão	12
1.3. União de Eventos.....	13
2. Permutações.....	16
2.1. Números Fatoriais.....	16
2.2. Permutações sem Repetição.....	17
2.3. Permutações com Repetição.....	20
2.4. Permutações Circulares	22
3. Arranjos e Combinações	23
3.1. Arranjos	23
3.2. Combinações	24
Resumo	30
Questões Comentadas em Aula	32
Exercícios	37
Gabarito	55
Gabarito Comentado.....	56
Anexo.....	119

APRESENTAÇÃO

Nessa aula, vamos tratar de um dos assuntos mais bonitos da Matemática, Análise Combinatória e Probabilidade, que estão entre os temas favoritos do seu professor - também há uma probabilidade grande de que seja um dos temas favoritos do seu examinador.

Sempre que esse assunto está previsto no edital, pode esperar, pelo menos, uma questão na sua prova.

As questões desse assunto dependem de poucas fórmulas e muito raciocínio. Basta você pegar o jeito, que você não vai perder nenhuma questão.

Por fim, gostaria de me colocar à sua disposição para tirar todas as suas dúvidas no Fórum de Dúvidas. E não se esquece de me seguir no Instagram: @math.gran.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Arrisco-me a dizer que é **aqui que se concentra a maior parte das questões desse assunto**. Posso dizer, ainda, que absolutamente tudo pode ser derivado desse importante princípio.

É por isso que precisamos dominá-lo. Entender perfeitamente o que ele quer dizer é a chave para o seu sucesso em Análise Combinatória.

Obs.: Se um processo tem duas etapas, em que a primeira etapa pode ser feita de m formas, **E** a segunda etapa pode ser feita de n formas, o processo total pode ser feito de $m.n$ formas.

O Princípio Fundamental da Contagem estabelece que, se você tem 2 calças e 3 camisas, você pode se vestir – isto é, colocar **uma calça E uma camisa** – de $2.3 = 6$ maneiras diferentes. Daqui a pouco, você vai entender porque destacamos o E.

Gostaria que você aprendesse o seguinte sistema para calcular:

2	x	3	= 6
Calças	E	Camisas	Total

Agora, vamos ilustrar o exemplo, para que você visualize que realmente existem seis opções de vestir 2 calças e 3 camisas.



Figura 1: seleção de 2 Calças e 3 Camisas

Como falamos, para se vestir, você precisa de uma calça (2 opções) **E** de uma camisa (3 opções).



Figura 2: ilustração do Princípio Fundamental da Contagem

E mais três formas de você se vestir com a segunda calça.

Obs.: Outra observação importante a fazer sobre o Princípio Fundamental da Contagem é quando se tem uma sentença com OU. Vejamos um exemplo para você entender melhor.

QUESTÃO INÉDITA

001. (INÉDITA/2023) Bruna tem 4 camisas, 2 calças, 1 saia e 3 sapatos. De quantas formas diferentes ela pode se vestir?



Para se vestir, Bruna precisa de:

Uma camisa **E**

Uma calça **OU** uma saia... **E**

Um sapato

Como Bruna pode usar 2 calças ou 1 saia, ela tem 3 opções para essa categoria de roupas.

É justamente a soma:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \times & 2+1 & \times & 3 & = & 6 \\ \hline \text{Camisas} & \text{E} & \text{Saías ou Calças} & & \text{Sapatos} & & \text{Total} \end{array}$$

Portanto, o número de formas que Bruna poderá se vestir é:

$$N = 4. (2 + 1). 3 = 4.3.3 = 36$$

Gabarito: 36.

ATENÇÃO 

Dessa maneira, podemos relacionar o Princípio Fundamental da Contagem com as conjunções E e OU. O bom uso dessas conjunções é capaz de resolver um grande número de problemas.

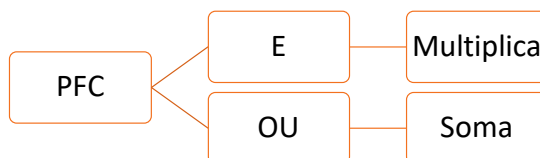


Figura 3: Princípio Fundamental da Contagem

002. (PGE – RO/TÉCNICO DA PROCURADORIA/2015) Quatro processos, numerados de 1 a 4, deverão ser distribuídos entre três procuradores: Átila, Hércules e Ulisses. Um mesmo procurador pode receber até quatro processos, exceto o procurador Átila, que não pode receber o processo número 2.

O número de maneiras diferentes de se fazer tal distribuição é:

- a) 81
- b) 64
- c) 54
- d) 11
- e) 8



Para cada um dos processos, exceto o 2, temos 3 opções de procuradores. Para o processo número 2, podemos escolher qualquer um dos outros 2 procuradores, exceto Áttila.

Precisamos escolher um procurador dentre 3 para o processo 1 **E** um procurador dentre 2 para o processo 2 **E** um procurador dentre 3 para o processo 3 **E** um procurador dentre 3 para o processo 4:

$$\begin{array}{rcccccc} 3 & \times & 2 & \times & 3 & \times & 3 & = & 54 \\ \hline 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \text{Total} \end{array}$$

Letra c.

003. (ESAF/FUNAI/2016) Considere as quatro letras A, C, G e T formando pares de letras nos quais A só forma par com T e C só forma par com G. Indique quantas sequências distintas de três pares ordenados de letras e com repetição podem ser formadas.

- a) 4
- b) 8
- c) 16
- d) 32
- e) 64



A sequência de pares ordenados a que se refere o problema, na verdade, refere-se às bases nitrogenadas que compõem o DNA.

Como dito pelo enunciado, a primeira base do par já determina, automaticamente, a segunda. São quatro possibilidades para a primeira base de cada par (A, C, G ou T), mas, para a segunda base, só existe uma possibilidade. Se a primeira base for A, a segunda, necessariamente, é T; se a primeira base for C, a segunda, necessariamente, é G - e assim por diante.

Portanto, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{rcccccc} 4.1 & \times & 4.1 & \times & 4.1 & = & 4.4.4 & = & 64 \\ \hline \text{Par 1} & & \text{Par 2} & & \text{Par 3} & & \text{Total} \end{array}$$

Letra e.

004. (FGV/DPE-RO/TÉCNICO DA DEFENSORIA PÚBLICA/2015) Considere todas as placas de veículos desde NCD-4000 até NCD-9999. O número de placas que possuem os dígitos todos diferentes é:

- a) 2.520
- b) 3.024
- c) 3.528
- d) 3.786
- e) 4.032



Questão muito inteligente. Perceba que as letras das placas já foram definidas. Elas só podem ser NCD. Portanto, não iremos nos preocupar com elas.

Para que uma placa esteja entre 4000 e 9999, o primeiro algarismo deve ser igual ou maior que 4. São, portanto, seis opções (4, 5, 6, 7, 8 e 9):

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & x & & x & & x & \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & \text{Total} \end{array}$$

Para o segundo algarismo, podemos escolher qualquer número que ainda não foi escolhido. São, portanto, 9 opções, porque não podemos escolher o número que foi escolhido para o primeiro algarismo.

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & x & 9 & x & & x & \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & \text{Total} \end{array}$$

Para o terceiro algarismo, não podemos escolher nenhum dos números que já foram escolhidos para o primeiro ou para o segundo algarismo. São, portanto, duas opções a menos, restando 8 opções.

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & x & 9 & x & 8 & x & \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & \text{Total} \end{array}$$

Analogamente, para o quarto algarismo, não podemos escolher nenhum dos três números que já foram escolhidos. Restam, portanto, 7 opções.

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & x & 9 & x & 8 & x & 7 \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & \text{Total} \end{array} = 3024$$

Letra b.

1.1. PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Um momento nerd. Confesso que gosto muito mais do nome original desse princípio: Teorema de Dirichlet.

De qualquer modo, o Teorema de Dirichlet ou o Princípio da Casa dos Pombos estabelecer que:

Obs.: Se m objetos devem ser guardados em n gavetas com $m > n$, então, pelo menos uma gaveta deverá ter mais de 1 objeto.

EXEMPLO

Se eu tenho 10 camisas e 8 gavetas, tudo o que podemos garantir é que, **pelo menos, uma gaveta terá mais de uma camisa.**

Essa conclusão é fácil de ser tomada. Se eu colocar uma camisa em cada gaveta, terei um total de 8 camisas. Se eu quiser guardar todas as 10 camisas em gavetas, teremos que, necessariamente, acumular mais de uma gaveta em alguma gaveta.

No entanto tome muito cuidado com essa conclusão. É relativamente fácil criar uma questão que possa confundir a respeito dele.

ATENÇÃO

Não é possível garantir que:

- Há duas gavetas com mais de uma camisa;
- Todas as gavetas têm, pelo menos, uma camisa;
- Existe uma gaveta com duas camisas.

Vejamos um modo curioso de guardar as 10 camisas em 8 gavetas, que ilustra claramente que todas essas três assertivas são falsas.

Tabela 1: Aplicação do Teorema de Dirichlet

Número de Camisas	0	4	1	1	1	1	1	1
Gaveta	1	2	3	4	5	6	7	8

No entanto podemos ver, claramente, que existe uma gaveta, no caso a 2, que tem mais de uma camisa.

Esse simples teorema cai demais e sempre traz confusão entre os alunos.

DIRETO DO CONCURSO



005. (INSTITUTO CONSULPLAN/PREFEITURA DE ORLÂNDIA - SP - PROCURADOR JURÍDICO/2023)

No cinema de um shopping center, 73 crianças aguardam para assistir à pré-estreia de um filme. Com o objetivo de fazer um sorteio de brindes, a administração solicitou que todas as crianças se organizassem em uma fila, posicionando-se uma atrás da outra. Qual o menor número de crianças deve ser sorteado para garantir que, das que foram sorteadas, tenha ao menos duas crianças vizinhas na fila?

- a) 36
- b) 37
- c) 38
- d) 39



Inicialmente, perceba que, de 1 a 73, temos uma sequência (1, 2, 3, 4,..., 72, 73) com 37 números ímpares e 36 números pares.

Se, por exemplo, sortearmos apenas as crianças ímpares, teremos 37 sorteios nos quais não houve ao menos duas crianças na fila. Porém note que basta apenas mais um sorteio para garantir essa condição do enunciado.

Assim, sabemos que a 38.^a criança sorteada, obrigatoriamente, estará em alguma das posições pares restantes. Logo, o menor número a ser sorteado será 38.

Letra c.

006. (FGV/PREFEITURA DE CUIABÁ-MT/PROFESSOR DE PEDAGOGIA/2015) Em uma sacola há uma bola branca, duas pretas e quatro vermelhas. Não há outras bolas na sacola além dessas que foram citadas.

Retiram-se quatro bolas da urna, aleatoriamente. Sobre as bolas retiradas, é correto afirmar que:

- a) Todas são vermelhas.
- b) No máximo uma é vermelha.
- c) Pelo menos uma é preta.
- d) Pelo menos duas são da mesma cor.
- e) Pelo menos duas são vermelhas.



Perceba que temos três gavetas diferentes – bolas brancas, bolas pretas e bolas vermelhas. Se retirarmos quatro bolas, pelo Teorema de Dirichlet, duas delas devem vir da mesma gaveta. Portanto, devem apresentar a mesma cor.

Podemos, ainda, garantir que uma delas é vermelha, porque existe um limite de três bolas que não são vermelhas. No entanto não é possível garantir que duas delas sejam vermelhas, pois podemos ter a seguinte situação: BPPV.

Não podemos garantir que uma é preta, pois podemos ter BVVV.

Mas, note que, em todos os casos, temos duas bolas da mesma cor, como já previsto pelo Teorema de Dirichlet.

Letra d.

007. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) Em uma gaveta há 5 pares de meias pretas, 7 pares de meias vermelhas e 10 pares de meias brancas. O número mínimo de pares de meias que precisam ser retirados da gaveta, sem que se veja a cor, para que certamente sejam retirados pelo menos três pares de meias de cores diferentes é

- a) 4.
- b) 15.
- c) 6.
- d) 13.
- e) 18.



É uma questão que requer bastante atenção. Ela pediu para ter certeza de que três pares de meias tenham cores diferentes. Portanto, o pior caso possível seria quando você retirasse as 10 meias brancas e, depois, 7 meias pretas. Nesse caso, necessariamente, a 18.^a meia seria vermelha, portanto, teríamos três pares de meias com cores diferentes.

Com menos de 18 meias, é sempre possível retirar apenas meias brancas e meias pretas.

Letra e.

1.2. PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Antes de adentrarmos no estudo da Teoria de Probabilidades, precisamos saber algumas noções básicas de conjuntos.

Considere o conjunto de eventos possíveis no lançamento de um dado. Nesse caso, temos:

Espaço Amostral de Eventos (Ω): representa **todo o conjunto de eventos possíveis**.

EXEMPLO

Se estamos falando de um lançamento de um dado de seis faces, teríamos o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Evento (A): é um evento qualquer para o qual se deseja calcular a probabilidade de ocorrência.

EXEMPLO

Se queremos saber qual a probabilidade de o lançamento ser maior ou igual a 5, temos que $A = \{5, 6\}$.

Além disso, temos algumas operações importantes. Vamos a elas.

Intersecção ($\cap$): é representado pela palavra E.

EXEMPLO

Considere dois eventos distintos. **A** é o evento anterior, ou seja, $A = \{5, 6\}$. Já o evento **B** é o lançamento resultar em número ímpar, portanto, tem-se $B = \{1, 3, 5\}$.

A intersecção, representada por $A \cap B$, **corresponde ao evento de acontecer A e B simultaneamente**. Para isso, **precisamos tomar os elementos comuns entre esses dois conjuntos**.

$$A \cap B = \{5\}$$

União ($\cup$): é representado pela palavra OU.

A união, representada por $A \cup B$, **corresponde ao evento de acontecer, pelo menos, um dos dois eventos, A ou B**. Para isso, basta agrupar os elementos de ambos os conjuntos.

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$$

1.3. UNIÃO DE EVENTOS

Trata-se de um assunto amplamente explorado em provas.

Para entender melhor a expressão que vai ser deduzida, vamos representar os eventos A e B por meio de diagramas.

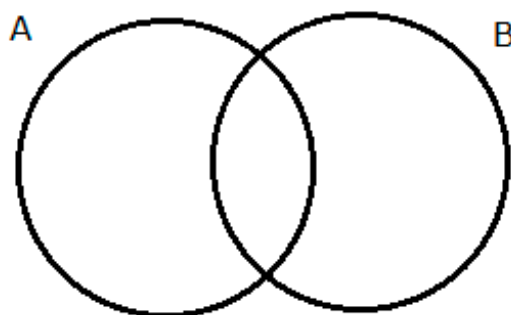


Figura 4: Diagrama da União de Dois Eventos

Para calcular a probabilidade da união de dois eventos, devemos calcular o número de elementos dessa união.

Podemos começar somando os elementos de **A** com os elementos de **B**. Marcaremos os elementos de **A** com linhas horizontais azuis, e os de **B** com linhas diagonais vermelhas.

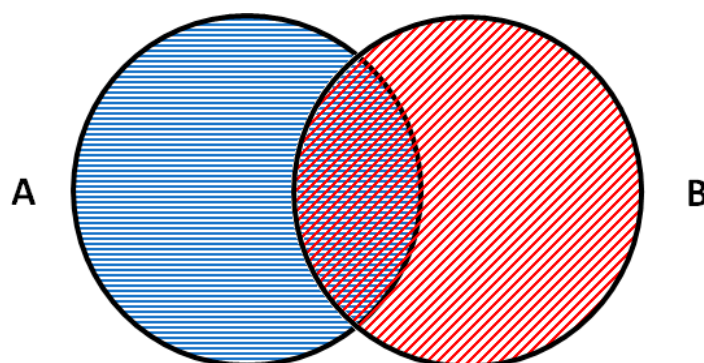


Figura 5: Visualização da Intersecção entre Dois Eventos

Perceba, no entanto, **que os elementos da intersecção foram contados duas vezes**. Por isso, **precisamos retirá-los**, de modo que eles sejam contados apenas uma vez.

Dessa maneira, podemos escrever que o número de elementos da união é:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Podemos generalizar essa expressão para a união de três eventos. Caso tenha curiosidade, você poderá tentar deduzir, porém isso vai dar um pouco de trabalho.

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

Há uma lógica relativamente simples para lembrar essa expressão. Perceba que:

$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup C) \\ = \text{Soma das Elementos Um a Um} - \text{Intersecções Dois a Dois} + \text{Intersecção Três a Três} \end{aligned}$$

É só você se lembrar que o sinal vai alternando. 1 a 1 é positivo, as probabilidades 2 a 2 entram com sinal negativo; 3 a 3 positivo - e assim por diante.

Eu nunca vi em provas de concurso, mas, se a questão colocar uma união de quatro ou mais eventos, você pode continuar: as intersecções 4 a 4 entram com sinal negativo, as 5 a 5 com sinal positivo - e por aí vai.

E, agora, vamos treinar?

DIRETO DO CONCURSO

008. (CESPE/TJ-SE/2014) O rito processual de análise de determinado tipo de processo segue as três seguintes fases:

- instrução: após a apresentação da representação e das provas, o juiz decide pela admissibilidade ou não do caso;
- julgamento: admitido o caso, o juiz analisa o mérito para decidir pela culpa ou não do representado;
- apenação: ao culpado o juiz atribui uma pena, que pode ser ou o pagamento de multa, ou a prestação de serviços à comunidade.

A partir das informações acima, considerando que a probabilidade de que ocorra erro de decisão na primeira fase seja de 10%, na segunda, de 5% e, na terceira, de 3%, e que a ocorrência de erro em uma fase não influencie a ocorrência de erro em outras fases, julgue os próximos itens.

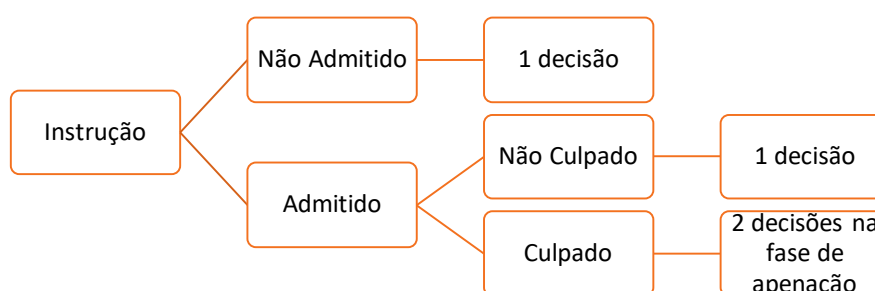
Para cada processo do referido tipo, desconsiderando os possíveis erros de decisão, a quantidade de possíveis decisões durante o rito processual é superior a 5.



Questão interessante sobre a aplicação do PFC. Perceba que, na fase de instrução, se o juiz decidir pela não admissibilidade do caso, não há que se falar nas etapas posteriores. Portanto, caso o juiz encerre o processo na fase de instrução, só haverá uma decisão possível: a não admissibilidade do processo.

O mesmo se aplica ao julgamento: se o juiz decidir pela não culpa do representado, não há que se falar em fase de apenação. Da mesma forma, só existe uma decisão possível – a não culpa do representado.

Dessa maneira, temos as seguintes possibilidades para as decisões no rito processual.



Caso o representado seja declarado culpado, o juiz poderá tomar 2 decisões diferentes na fase de apenação: o pagamento de multa ou a prestação de serviços na comunidade. Portanto, são apenas quatro decisões possíveis, não um número superior a cinco.

Errado.

2. PERMUTAÇÕES

O problema das permutações consiste em encontrar o número de anagramas para uma palavra.

Um anagrama é uma palavra que pode ser obtida a partir de outra por meio de trocas nas posições das letras.

EXEMPLO

Quantos anagramas possui a palavra AMOR?

São exemplos: RAOM, MRAO, AMRO.

Como a palavra AMOR tem 4 letras, temos, na verdade, quatro posições. Na primeira posição, podemos colocar qualquer uma das quatro letras.

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & . & . & . & . & & \\ \hline & & & & & & \text{Total} \end{array}$$

Na segunda posição, podemos colocar qualquer uma das letras que não foram usadas, portanto, temos 3 opções

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & . & 3 & . & . & . & \\ \hline & & & & & & \text{Total} \end{array}$$

Na terceira posição, podemos colocar qualquer uma das letras que não foram usadas nas duas posições anteriores. Sobraram, portanto, 2 opções. Para a quarta opção, só restou a última letra que ainda não foi usada. Portanto, o número de anagramas é:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & . & 3 & . & 2 & . & 1 \\ \hline & & & & & & \text{Total} \end{array} = 4.3.2.1 = 24$$

Temos, portanto, 24 anagramas. Perceba, ainda, que simplesmente usamos o Princípio Fundamental da Contagem para esse cálculo.

Agora, que você aprendeu a mecânica de como funciona o cálculo de permutações, vamos nos aprofundar nesse assunto.

2.1. NÚMEROS FATORIAIS

Os fatoriais são representados pela exclamação "!". Para os números inteiros, define-se:

$$0! = 1$$

$$n! = n.(n-1)!$$

Assim, podemos calcular todos os fatoriais. Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{aligned}0! &= 1 \\1! &= 1.0! = 1 \\2! &= 2.1! = 2.1 = 2 \\3! &= 3.2! = 3.2.1 = 6 \\4! &= 4.3! = 4.3.2.1 = 24\end{aligned}$$

Temos duas observações interessantes sobre os números fatoriais.

- $n!$ representa o produto de todos os números naturais de 1 a n ;
- $n!$ contém todos os fatoriais de números anteriores.

Por exemplo, em $5!$, podemos enxergar:

$$5! = 5.4.3.2.1 = 5.4! = 5.4.3! = 5.4.3.2!$$

Dessa maneira, um fatorial de um número maior sempre é divisível pelo fatorial de um número menor. Isso é importante para definirmos as permutações com repetição, os arranjos e as combinações.

2.2. PERMUTAÇÕES SEM REPETIÇÃO

Quando temos uma fila de n elementos todos diferentes, o número de permutações é dado por:

$$P_n = n!$$

É bem fácil de entender essa fórmula. Assim como fizemos para a palavra AMOR, podemos fazer uma generalização para uma sequência qualquer de n elementos.

Para a primeira posição, podemos escolher qualquer uma dos n elementos.

$$\frac{n}{\text{Total}}$$

Para a segunda posição, não podemos escolher o que já foi escolhido na primeira. Restam, portanto, $n-1$ elementos. Para a posição seguinte, restarão $n-2$ – e assim por diante, até que, na última posição, só teremos uma escolha.

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1}{\text{Total}} \quad n! = n(n-1)\dots 2.1$$

Agora, já estamos avançando na matéria e dispondo de mais recursos para resolver as questões.

DIRETO DO CONCURSO

009. (FCC/TRF-4ª REGIÃO/ANALISTA JUDICIÁRIO–OFICIAL DE JUSTIÇA AVALIADOR FEDERAL/2019) Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é:

- a) 120
- b) 24
- c) 30
- d) 6
- e) 4



Observe que sobraram 4 candidatos e 4 municípios (B, C, D e E) em que eles podem ser alocados. Como são 4 candidatos que podem ser alocados em 4 municípios, o total de possibilidades é dado pela permutação de 4 elementos:

$$N = P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Letra b.

010. (ESAF/AFRB/2012) Na prateleira de uma estante, encontram-se 3 obras de 2 volumes e 2 obras de 2 volumes, dispondo-se, portanto, de um total de 10 volumes. Assim, o número de diferentes maneiras que os volumes podem ser organizados na prateleira, de modo que os volumes de uma mesma obra nunca fiquem separados, é igual a:

- a) 3.260
- b) 3.840
- c) 2.896
- d) 1.986
- e) 1.842



O fato de a questão ter separado 3 obras de 2 volumes e 2 obras de 2 volumes não influencia o resultado.

Perceba que, de qualquer maneira, podemos permutar livremente as 5 obras. Logo, temos o seguinte:

<u>5</u>	.	<u>4</u>	...	<u>1</u>	= 5! = 120
Obra 1		Obra 2	...	Obra 5	Total

Agora, quanto aos anagramas que começam com a letra P, perceba que o primeiro deles é exatamente PCEM, pois as letras CEM estão em ordem alfabética.

Sendo assim, só existem 18 anagramas da palavra PCEM que vêm antes dela no alfabeto. Portanto, ela ocupa 19.^a posição entre os anagramas. Muito cuidado para não cair na pegadinha da letra d), 18.

Letra c.

2.3. PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

Quantos anagramas tem a palavra AMADA?

Essa palavra tem cinco letras. Portanto, aplicando o raciocínio anterior, teríamos:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1}{\text{Total}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\text{Total}} = 120$$

No entanto prestemos atenção a alguns dos possíveis anagramas. Vamos identificar as três letras **A** da palavra, como A_1, A_2 e A_3 – lembrando que é importante destacar que essas letras são iguais.

$$\begin{array}{c} A_1 M A_2 D A_3 \\ A_3 M A_2 D A_1 \\ A_1 M A_3 D A_2 \end{array}$$

Observe que esses anagramas, na verdade, são iguais. Portanto, não deveriam ser contados. Por isso, precisamos **descontar as permutações** entre as letras repetidas.

Como são 3 letras **A**, precisamos dividir por 3! – a conta é uma divisão, porque estamos aplicando o Princípio Fundamental da Contagem.

Portanto, o número de anagramas da palavra AMADA será:

$$P_5^3 = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

Podemos generalizar esse raciocínio. O número de permutações **n** elementos com **k** repetições é dado por:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!}$$

Outro exemplo interessante é a palavra MATEMÁTICA. Essa palavra possui 10 letras, mas tem **2 M** repetidos, **2 T** repetidos e **3 A** repetidos. Assim, o número de anagramas dessa palavra será:

$$P_{10}^{2,2,3} = \frac{10!}{2!2!3!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3!}{2.1.2.1.3!} = 10.9.8.7.6.5 = 151200$$

DIRETO DO CONCURSO

012. (CESPE/TRE-MT/2015) Em um campeonato de futebol amador de pontos corridos, do qual participam 10 times, cada um desses times joga duas vezes com cada adversário, o que totaliza exatas 18 partidas para cada. Considerando-se que o time vencedor do campeonato venceu 13 partidas e empatou 5, é correto afirmar que a quantidade de maneiras possíveis para que esses resultados ocorram dentro do campeonato é.

- a) superior a 4.000 e inferior a 6.000.
- b) superior a 6.000 e inferior a 8.000.
- c) superior a 8.000.
- d) inferior a 2.000.
- e) superior a 2.000 e inferior a 4.000.



Queremos que a equipe em questão tenha vencido 13 partidas e empatado 5 vezes nas suas 18 partidas. Sendo **V** uma vitória e **E** um empate, queremos o número de anagramas da seguinte palavra.

VVVVVVVVVVVVVVEEEEE

Trata-se de um problema clássico de permutação com repetição.

$$N = \frac{18!}{13!5!} = \frac{18.17.16.15.14}{5.4.3.2.1} = \frac{18.17.2.1.14}{1.1.1.1.1} = 8568 > 8000$$

Letra c.

013. (FGV/AL-BA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR – ECONOMIA/2014) A sigla de Assembleia Legislativa do Estado da Bahia é “ALBA”. Embaralhando as letras de ALBA, o número de sequências diferentes que podem ser formadas com essas mesmas 4 letras é:

- a) 4
- b) 6
- c) 8
- d) 10
- e) 12



A palavra ALBA tem 4 letras, sendo duas repetidas, portanto, o número de anagramas é:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

Letra e.

2.4. PERMUTAÇÕES CIRCULARES

Nas permutações circulares, não existe o primeiro e o último termo.

Pense, por exemplo, em uma mesa redonda.

Vejam um exemplo com quatro elementos:

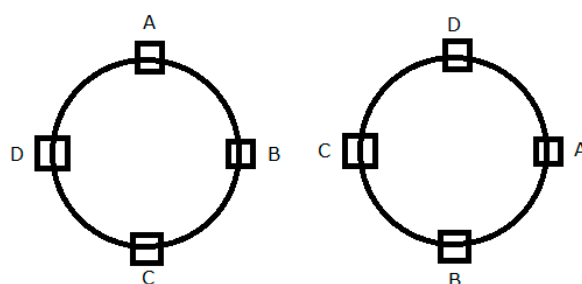


Figura 6: Permutações Circulares

Perceba que as duas imagens representam a mesma permutação, porque podem ser obtidas uma da outra por meio de uma rotação. Experimente rotacionar a imagem da esquerda 90° no sentido horário – e você chegará à imagem da direita.

Assim, quando se consideram as permutações circulares, é necessário considerar que algumas permutações são perdidas.

Na Figura 6, podemos ver que existem 4 rotações. Basta que você continue rotacionando em 90° no sentido horário – a quarta rotação será igual à imagem original.

Assim, devemos dividir por 4 as permutações. Teríamos, portanto, nesse caso:

$$PC_4 = \frac{4!}{4} = 3! = 6$$

Podemos generalizar essa expressão. O número de permutações circulares sem repetição de **n** elementos é:

$$PC = \frac{n!}{n} = (n - 1)!$$

Caso haja repetições, basta aplicar o princípio visto na seção anterior.

3. ARRANJOS E COMBINAÇÕES

Esse é um dos assuntos mais explorados pelas provas, justamente pela confusão que os alunos costumam fazer entre arranjos e combinações.

Arranjos e Combinações consistem em **escolher k elementos num total de n** .

A diferença crucial entre eles é saber se a ordem importa ou não.

Nesse curso, não consideraremos os casos em que há elementos repetidos. Faremos o estudo apenas com todos os elementos diferentes. O estudo de arranjos e combinações com repetição elevam bastante o grau de dificuldade das questões, e tal assunto jamais apareceu em provas de concursos públicos.

3.1. ARRANJOS

Um arranjo consiste em escolher k elementos num total de n , **importando a ordem**.

Suponha, por exemplo, que você tem uma equipe de 10 pessoas, e você precisa escolher 2 delas para ser o presidente e o vice-presidente de uma comissão.

De quantas formas você poderá formar a tal comissão?

Para o Presidente, temos 10 opções, pois qualquer um dos membros da equipe pode sê-lo. Já para o vice, temos apenas 9 opções, pois o membro que já foi escolhido como presidente não pode ser escolhido.

Usando o Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$\begin{array}{ccc} \underline{10} & \cdot & \underline{9} \\ \text{Presidente} & & \text{Vice} \end{array} = 10 \cdot 9 = 90$$

Agora, a pergunta mais relevante que você precisa fazer para questões de prova:

Por que a ordem importa nesse caso?

Pare e pense na resposta dessa pergunta. Somente depois, prossiga a leitura desse material.

Ora, vejamos duas escolhas em que só mudou a ordem.

A	B
Presidente	Vice
B	A
Presidente	Vice

Perceba que existe uma grande diferença. No primeiro caso, **A** era o presidente, e **B** era o vice. No segundo caso, mudou a ordem e mudaram também as funções.

Por isso, as possibilidades são diferentes e devem ser consideradas.

ATENÇÃO

Sempre que uma questão falar de uma comissão em que as pessoas têm **funções diferentes**, a ordem importa, portanto você deverá utilizar um **arranjo**.

Caso a questão fale de uma comissão genérica em que todas as pessoas **têm funções iguais**, a ordem não importa, portanto, você deverá utilizar uma **combinação**.

São comuns, também, as questões em que parte dos membros são genéricos e parte têm funções especiais. Nesse caso, minha recomendação é que você use o PFC, começando pelos membros que possuem funções especiais, ou seja, pelo arranjo.

Agora, vamos apresentar a fórmula geral do arranjo, que pode ser obtida pelo Princípio Fundamental da Contagem.

Precisamos escolher **k** elementos num total de **n**. Isso também pode ser dito da seguinte forma: “um arranjo de **n** elementos **k** a **k**”.

Para o primeiro a ser escolhido, temos **n** possibilidades – qualquer elemento pode ser escolhido. Para o segundo a ser escolhido, temos **n – 1** opções, pois não podemos repetir o primeiro elemento já escolhido.

Para o terceiro, temos **n – 2**, porque não podemos escolher nenhum dos 2 que já foram escolhidos – e assim por diante, até que, para o **k-ésimo** elemento escolhido, teremos **n – k + 1** opções.

Agora, aplicando o PFC, temos:

$$\frac{n}{1^o} \cdot \frac{n-1}{2^o} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{k^o} = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Total

Dessa maneira, temos que o arranjo de **n** elementos **k** a **k** é dado por:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$$

3.2. COMBINAÇÕES

Uma combinação consiste em escolher **k** elementos num total de **n**, **sem importar a ordem**.

Nesse caso, podemos partir da fórmula já deduzida para o arranjo, mas precisamos descontar as permutações dos **k** elementos escolhidos.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Essa expressão é extremamente importante. É chamada de “combinação de n elementos k a k ” ou, ainda, de “binomial de n k a k ”. O termo binomial é muito conhecido num assunto chamado Binômio de Newton.

Vale a pena conhecer a notação para o número binomial, que é apresentada a seguir:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

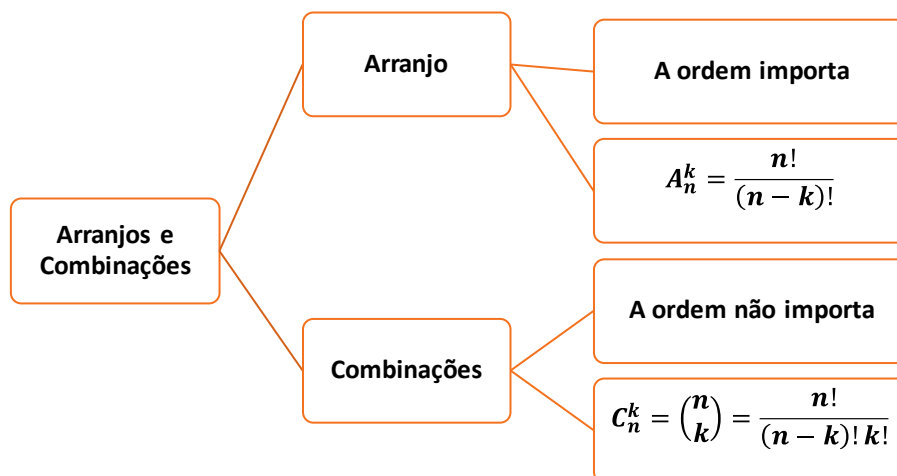


Figura 7: Arranjos e Combinações

DIRETO DO CONCURSO

014. (INSTITUTO CONSULPLAN/PREFEITURA DE ORLÂNDIA – SP/CONSULTOR JURÍDICO/2023)
Para divulgar os avanços obtidos por um grupo de pesquisa, o departamento de saúde coletiva de uma universidade decidiu organizar um congresso acadêmico durante os dias 21 a 30 de março deste ano. No processo de inscrição, 16 comunicações orais foram submetidas para o congresso. Considerando que em cada dia do congresso terá a apresentação de apenas uma comunicação oral, sem repetição, então o número de maneiras distintas que as comunicações orais podem ser organizadas entre os dias do congresso é:

- a) 10!
- b) 16!
- c) 16! / 6!
- d) 16! / 10!



Inicialmente, perceba que temos 10 dias de apresentações entre 21 a 30 de março. Além disso, temos 16 comunicações orais para escolher.

Note que a ordem das apresentações importa, pois se apresentar no primeiro dia é diferente de se apresentar no último dia. Como a ordem importa, utilizamos o conceito de arranjo. Segue a sua expressão:

$$A = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Seja **n** o número total de comunicações orais e **p** o número de dias para realizar as apresentações, temos, pelos dados da questão:

$$n = 16;$$

$$p = 10;$$

Substituindo os valores, encontramos:

$$A = \frac{16!}{(16 - 10)!}$$

$$\therefore A = \frac{16!}{6!}$$

Letra c.

015. (IBFC/PREFEITURA DE DOURADOS – MS/ANALISTA DE TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO/2022)

Uma agência de viagens irá sortear três passagens ida e volta para as ilhas Maldivas dentre os seus sete funcionários, sendo que um mesmo funcionário não pode ser sorteado mais que uma vez. Desse modo, o total de possibilidades de sorteio possíveis é igual a:

- a) 210
- b) 420
- c) 70
- d) 35



Inicialmente, temos 7 funcionários que devem ser escolhidos para desfrutar de apenas 3 passagens.

Perceba que a ordem em que os funcionários são escolhidos não importa, pois precisamos apenas em montar um grupo de funcionários selecionados. Logo, utilizamos a Fórmula da Combinação:

$$C = \frac{n!}{(n - p)! \cdot p!}$$

Com **n** sendo o número total de funcionários e **p** a quantidade de passagens, temos, então:

N = 7 funcionários;

P = 3 passagens;

Assim:

$$C = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!}$$

$$C = \frac{7!}{(4)! \cdot 3!}$$

$$C = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{(4)! \cdot 3!}$$

$$C = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!}$$

$$C = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Podemos simplificar o numerador com o denominador, pois $3 \cdot 2 = 6$. Assim, teremos:

$$C = 7 \cdot 5$$

$$\therefore C = 35 \text{ possibilidades}$$

Letra d.

016. (CESPE/PGE-PE/ANALISTA ADMINISTRATIVO DE PROCURADORIA – CALCULISTA/2019) A União tem, hoje, 138 estatais sob sua gestão, entre elas o Banco do Brasil S.A., a PETROBRAS e a CAIXA. Dessas 138, somente três devem permanecer sob a gestão da União; as demais serão privatizadas.

Considerando essa afirmação, julgue o próximo item.

Se todas as estatais tiverem a chance de ficar sob a gestão da União, então a quantidade de maneiras distintas de escolher as três empresas que não serão privatizadas será inferior a 230.000.



Vamos escolher 3 empresas dentre as 138 possíveis para não serem privatizadas. Nessa seleção, a ordem não importa.

Tanto faz escolhermos Petrobras, Banco do Brasil e Caixa ou escolhermos Caixa, Banco do Brasil e Petrobras. Em ambos os casos, nenhuma das três será privatizada. Portanto, devemos usar uma combinação.

$$\binom{138}{3} = \frac{138!}{135!3!} = \frac{138 \cdot 137 \cdot 136}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 428536 > 230000$$

Errado.

017. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/PAPILOSCOPISTA POLICIAL FEDERAL/2018) Em um processo de coleta de fragmentos papilares para posterior identificação de criminosos, uma equipe de 15 papiloscopistas deverá se revezar nos horários de 8 h às 9 h e de 9 h às 10 h.

Com relação a essa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Se dois papiloscopistas forem escolhidos, um para atender no primeiro horário e outro no segundo horário, então a quantidade, distinta, de duplas que podem ser formadas para fazer esses atendimentos é superior a 300.



Temos 15 opções de papiloscopistas para o primeiro horário. Para o segundo horário, deve ser escolhido um profissional distinto, portanto, são 14 possibilidades.

<u>15</u>	<u>14</u>	<u>= 15.14 = 210</u>
8h às 9h	9h às 10h	Total

São 210 possibilidades, o que é menor que 300.

Errado.

018. (CESPE/SEFAZ-RS/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO FAZENDÁRIO/2018) Sete pessoas se dirigem para formar uma fila em frente ao único caixa de atendimento individual em uma agência bancária. Dessas sete pessoas, quatro são idosos. Um servidor da agência deverá organizar a fila de modo que os idosos sejam atendidos antes dos demais.

Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de se organizar a fila é igual a

- a) 5.040.
- b) 720.
- c) 576.
- d) 288.
- e) 144.



Para organizar a fila, devemos colocar os idosos na frente dos outros clientes. Além disso, devemos notar que tanto os 4 idosos como os outros 3 clientes podem sofrer permutações nas suas ordenações.

Os 4 idosos podem ser organizados de $4! = 24$ formas; e os outros 3 clientes podem ser organizados de $3! = 6$ formas.

<u>4!</u>	x	<u>3!</u>	=	<u>4!.3!</u>
Idosos		Outros		Total

Portanto, o total de possibilidades de organizar a fila é:

$$N = 4! \cdot 3! = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 24 \cdot 6 = 144$$

Letra e.

019. (CESPE/TRF-1ª REGIÃO/2017) Em uma reunião de colegiado, após a aprovação de uma matéria polêmica pelo placar de 6 votos a favor e 5 contra, um dos 11 presentes fez a seguinte afirmação: "Basta um de nós mudar de ideia e a decisão será totalmente modificada." Considerando a situação apresentada e a proposição correspondente à afirmação feita, julgue o próximo item.

A quantidade de maneiras distintas de se formar o placar de 6 votos a favor e 5 contra, na decisão do assunto polêmico pelos presentes no referido colegiado, é inferior a 500.



Nesse caso, precisamos escolher 6 presentes para terem uma opinião a favor e 5 presentes para terem uma opinião contrária.

Entre os favoráveis, precisamos escolher 6 presentes no total de 11.

$\binom{11}{6}$	·	
A favor		Contra Total

Como já escolhemos 6 presentes, sobraram apenas 5. Todos eles precisam ser contrários.

$\binom{11}{6}$	·	$\binom{5}{5}$
A favor		Contra Total

Basta calcular o produto encontrado:

$$\binom{11}{6} = \frac{11!}{6!5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

462	·	1
A favor		Contra Total

De fato, $462 < 500$.

Certo.

RESUMO

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Se você tem 2 calças **E** 3 camisas, o número de formas que você pode se vestir é:

$$\begin{array}{rcccl} 2 & \times & 3 & & = 6 \\ \hline \text{Calças} & \text{E} & \text{Camisas} & & \text{Total} \end{array}$$

Quando há o termo "OU", devemos somar as opções.

Se você pode usar 2 sapatos ou 1 tênis, 2 calças e 3 camisas, o número de formas que você pode se vestir é:

$$\begin{array}{rcccl} (2+1) & \times & 2 & \times & 3 & & = 18 \\ \hline \text{Sapatos ou Tênis} & & \text{Calças} & & \text{Camisas} & & \text{Total} \end{array}$$

OU: soma;

E: multiplica.

PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Se eu tenho 10 camisas e 8 gavetas, então **pelo menos uma gaveta terá mais de uma camisa;**

Se eu tenho **A** gavetas e queremos saber o número mínimo de camisas para garantir que exista pelo menos uma gaveta com **k** camisas, o cálculo é igual a $k.A + 1$.

ATENÇÃO



Não é possível garantir que:

- Há duas gavetas com mais de uma camisa;
- Todas as gavetas têm, pelo menos, uma camisa;
- Existe uma gaveta com duas camisas.

PERMUTAÇÕES

Consiste em mudar a ordem dos elementos

Sem Repetição	Permutações de n elementos distintos	$P_n = n!$
Com Repetição	Devemos dividir pelas permutações dos elementos repetidos	$P_n^{k_1, k_2} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$
Circulares	Devemos descontar as n possibilidades ao girar o círculo	$PC_n = (n - 1)!$

ARRANJOS E COMBINAÇÕES

Sempre que uma questão falar de uma comissão em que as pessoas têm **funções diferentes**, a ordem importa, portanto, você deverá utilizar um **arranjo**.

Caso a questão fale de uma comissão genérica em que todas as pessoas **têm funções iguais**, a ordem não importa, portanto, você deverá utilizar uma **combinação**.

Arranjos	Escolher k elementos dentre n em que a ordem importa	$A_{n,k} = \frac{n!}{(n - k)!}$
Combinações	Escolher k elementos dentre n em que a ordem não importa	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$

QUESTÕES COMENTADAS EM AULA

001. (INÉDITA/2023) Bruna tem 4 camisas, 2 calças, 1 saia e 3 sapatos. De quantas formas diferentes ela pode se vestir?

002. (PGE-RO/TÉCNICO DA PROCURADORIA/2015) Quatro processos, numerados de 1 a 4, deverão ser distribuídos entre três procuradores: Átila, Hércules e Ulisses. Um mesmo procurador pode receber até quatro processos, exceto o procurador Átila, que não pode receber o processo número 2.

O número de maneiras diferentes de se fazer tal distribuição é:

- a) 81
- b) 64
- c) 54
- d) 11
- e) 8

003. (ESAF/FUNAI/2016) Considere as quatro letras A, C, G e T formando pares de letras nos quais A só forma par com T e C só forma par com G. Indique quantas sequências distintas de três pares ordenados de letras e com repetição podem ser formadas.

- a) 4
- b) 8
- c) 16
- d) 32
- e) 64

004. (FGV/DPE-RO/TÉCNICO DA DEFENSORIA PÚBLICA/2015) Considere todas as placas de veículos desde NCD-4000 até NCD-9999. O número de placas que possuem os dígitos todos diferentes é:

- a) 2.520
- b) 3.024
- c) 3.528
- d) 3.786
- e) 4.032

005. (INSTITUTO CONSULPLAN/PREFEITURA DE ORLÂNDIA - SP - PROCURADOR JURÍDICO/2023) No cinema de um shopping center, 73 crianças aguardam para assistir à pré-estreia de um filme. Com o objetivo de fazer um sorteio de brindes, a administração solicitou que todas as

crianças se organizassem em uma fila, posicionando-se uma atrás da outra. Qual o menor número de crianças deve ser sorteado para garantir que, das que foram sorteadas, tenha ao menos duas crianças vizinhas na fila?

- a) 36
- b) 37
- c) 38
- d) 39

006. (FGV/PREFEITURA DE CUIABÁ-MT/PROFESSOR DE PEDAGOGIA/2015) Em uma sacola há uma bola branca, duas pretas e quatro vermelhas. Não há outras bolas na sacola além dessas que foram citadas.

Retiram-se quatro bolas da urna, aleatoriamente. Sobre as bolas retiradas, é correto afirmar que:

- a) Todas são vermelhas.
- b) No máximo uma é vermelha.
- c) Pelo menos uma é preta.
- d) Pelo menos duas são da mesma cor.
- e) Pelo menos duas são vermelhas.

007. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) Em uma gaveta há 5 pares de meias pretas, 7 pares de meias vermelhas e 10 pares de meias brancas. O número mínimo de pares de meias que precisam ser retirados da gaveta, sem que se veja a cor, para que certamente sejam retirados pelo menos três pares de meias de cores diferentes é

- a) 4.
- b) 15.
- c) 6.
- d) 13.
- e) 18.

008. (CESPE/TJ-SE/2014) O rito processual de análise de determinado tipo de processo segue as três seguintes fases:

- instrução: após a apresentação da representação e das provas, o juiz decide pela admissibilidade ou não do caso;
- julgamento: admitido o caso, o juiz analisa o mérito para decidir pela culpa ou não do representado;
- apenação: ao culpado o juiz atribui uma pena, que pode ser ou o pagamento de multa, ou a prestação de serviços à comunidade.

A partir das informações acima, considerando que a probabilidade de que ocorra erro de decisão na primeira fase seja de 10%, na segunda, de 5% e, na terceira, de 3%, e que a ocorrência de erro em uma fase não influencie a ocorrência de erro em outras fases, julgue os próximos itens.

Para cada processo do referido tipo, desconsiderando os possíveis erros de decisão, a quantidade de possíveis decisões durante o rito processual é superior a 5.

009. (FCC/TRF – 4ª REGIÃO/ANALISTA JUDICIÁRIO – OFICIAL DE JUSTIÇA AVALIADOR FEDERAL/2019) Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é:

- a) 120
- b) 24
- c) 30
- d) 6
- e) 4

010. (ESAF/AFRB/2012) Na prateleira de uma estante, encontram-se 3 obras de 2 volumes e 2 obras de 3 volumes, dispondo-se, portanto, de um total de 10 volumes. Assim, o número de diferentes maneiras que os volumes podem ser organizados na prateleira, de modo que os volumes de uma mesma obra nunca fiquem separados, é igual a:

- a) 3.260
- b) 3.840
- c) 2.896
- d) 1.986
- e) 1.842

011. (FGV/PC-MA/AUXILIAR DE PERÍCIA MÉDICO-LEGAL/2012) Considere as 24 permutações das letras P, C, E e M. Se colocarmos essas 24 permutações em ordem alfabética, a permutação PCEM ocupará a posição de ordem:

- a) 24
- b) 21
- c) 19
- d) 18
- e) 17

012. (CESPE/TRE-MT/2015) Em um campeonato de futebol amador de pontos corridos, do qual participam 10 times, cada um desses times joga duas vezes com cada adversário, o que

totaliza exatas 18 partidas para cada. Considerando-se que o time vencedor do campeonato venceu 13 partidas e empatou 5, é correto afirmar que a quantidade de maneiras possíveis para que esses resultados ocorram dentro do campeonato é.

- a) superior a 4.000 e inferior a 6.000.
- b) superior a 6.000 e inferior a 8.000.
- c) superior a 8.000.
- d) inferior a 2.000.
- e) superior a 2.000 e inferior a 4.000.

013. (FGV/AL-BA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR – ECONOMIA/2014) A sigla de Assembleia Legislativa do Estado da Bahia é “ALBA”. Embaralhando as letras de ALBA, o número de sequências diferentes que podem ser formadas com essas mesmas 4 letras é:

- a) 4
- b) 6
- c) 8
- d) 10
- e) 12

014. (INSTITUTO CONSULPLAN/PREFEITURA DE ORLÂNDIA – SP/CONSULTOR JURÍDICO/2023) Para divulgar os avanços obtidos por um grupo de pesquisa, o departamento de saúde coletiva de uma universidade decidiu organizar um congresso acadêmico durante os dias 21 a 30 de março deste ano. No processo de inscrição, 16 comunicações orais foram submetidas para o congresso. Considerando que em cada dia do congresso terá a apresentação de apenas uma comunicação oral, sem repetição, então o número de maneiras distintas que as comunicações orais podem ser organizadas entre os dias do congresso é:

- a) 10!
- b) 16!
- c) 16! / 6!
- d) 16! / 10!

015. (IBFC/PREFEITURA DE DOURADOS – MS/ANALISTA DE TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO/2022) Uma agência de viagens irá sortear três passagens ida e volta para as ilhas Maldivas dentre os seus sete funcionários, sendo que um mesmo funcionário não pode ser sorteado mais que uma vez. Desse modo, o total de possibilidades de sorteio possíveis é igual a:

- a) 210
- b) 420
- c) 70
- d) 35

016. (CESPE/PGE-PE/ANALISTA ADMINISTRATIVO DE PROCURADORIA – CALCULISTA/2019) A União tem, hoje, 138 estatais sob sua gestão, entre elas o Banco do Brasil S.A., a PETROBRAS e a CAIXA. Dessas 138, somente três devem permanecer sob a gestão da União; as demais serão privatizadas.

Considerando essa afirmação, julgue o próximo item.

Se todas as estatais tiverem a chance de ficar sob a gestão da União, então a quantidade de maneiras distintas de escolher as três empresas que não serão privatizadas será inferior a 230.000.

017. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/PAPILOSCOPISTA POLICIAL FEDERAL/2018) Em um processo de coleta de fragmentos papilares para posterior identificação de criminosos, uma equipe de 15 papiloscopistas deverá se revezar nos horários de 8 h às 9 h e de 9 h às 10 h.

Com relação a essa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Se dois papiloscopistas forem escolhidos, um para atender no primeiro horário e outro no segundo horário, então a quantidade, distinta, de duplas que podem ser formadas para fazer esses atendimentos é superior a 300.

018. (CESPE/SEFAZ-RS/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO FAZENDÁRIO/2018) Sete pessoas se dirigem para formar uma fila em frente ao único caixa de atendimento individual em uma agência bancária. Dessas sete pessoas, quatro são idosos. Um servidor da agência deverá organizar a fila de modo que os idosos sejam atendidos antes dos demais.

Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de se organizar a fila é igual a

- a) 5.040.
- b) 720.
- c) 576.
- d) 288.
- e) 144.

019. (CESPE/TRF-1ª REGIÃO/2017) Em uma reunião de colegiado, após a aprovação de uma matéria polêmica pelo placar de 6 votos a favor e 5 contra, um dos 11 presentes fez a seguinte afirmação: “Basta um de nós mudar de ideia e a decisão será totalmente modificada.”

Considerando a situação apresentada e a proposição correspondente à afirmação feita, julgue o próximo item.

A quantidade de maneiras distintas de se formar o placar de 6 votos a favor e 5 contra, na decisão do assunto polêmico pelos presentes no referido colegiado, é inferior a 500.

EXERCÍCIOS

020. (IBFC/PREFEITURA DE DOURADOS-MS/FISCAL DE OBRAS/2022) De acordo com a palavra SOFTWARE, a quantidade de anagramas (palavras com ou sem sentido) que apresentam as letras FTW juntas e em qualquer ordem corresponde a:

- a) 720
- b) 3600
- c) 540
- d) 4320

021. (INSTITUTO CONSULPLAN/PREFEITURA DE ORLÂNDIA-SP/PROCURADOR JURÍDICO/2023) LUCIANA está cursando as seguintes 5 disciplinas em seu curso de Estatística: Análise de Regressão; Probabilidade II; Inferência; Estatística Multivariada; e, Teoria de Resposta ao Item. Para cada disciplina, Luciana possui dois livros que precisam ser organizados em uma prateleira de modo que os livros da mesma disciplina permaneçam sempre juntos. Dessa forma, quantas maneiras distintas Luciana pode organizar os seus livros na prateleira?

- a) 768
- b) 1.536
- c) 2.848
- d) 3.840

022. (CEBRASPE/PETROBRAS/2021) Uma empresa distribuidora de combustíveis atendia, ao término do ano de 2020, apenas 30 clientes. Após a implementação de medidas administrativas, a quantidade de novos clientes dessa empresa, no primeiro semestre de 2021 (contada sempre em relação ao mês anterior), aumentou em progressão geométrica. Na tabela a seguir, está registrada a quantidade total de clientes da empresa no final dos 4 primeiros meses de 2021.

total de clientes da empresa				
meses	Janeiro 2021	Fevereiro 2021	Março 2021	Abril 2021
total de clientes	32	36	44	60

Supondo-se que, no final de março de 2021, três clientes devessem ter sido aleatoriamente escolhidos para responder a um questionário de avaliação da empresa, então a quantidade de formas diferentes de fazer essa escolha, de modo que, no grupo escolhido, houvesse pelo menos 2 clientes que tivessem ingressado na empresa antes de 2021, é inferior a 4.000.

023. (FGV/MP-SC/AUXILIAR DO MINISTÉRIO PÚBLICO/2022) QUATRO casais foram ao cinema e vão sentar em 8 cadeiras consecutivas em uma mesma fileira. O número de maneiras distintas de os 4 casais se sentarem nas 8 cadeiras, de modo que cada mulher se sente ao lado de seu marido, é:

- a) 24;
- b) 96;
- c) 256;
- d) 384;
- e) 576.

024. (VUNESP/TJ-SP/ESCREVENTE/2021) Na gaveta de camisetas de Jeferson há 5 camisetas pretas, 7 camisetas vermelhas e 9 camisetas azuis. O menor número de camisetas que Jeferson precisará retirar da gaveta, de maneira aleatória e sem saber quais camisetas estão saindo, para ter certeza de ter retirado pelo menos uma camiseta preta e uma camiseta azul, é

- a) 14.
- b) 18.
- c) 16.
- d) 20.
- e) 17

025. (CESPE/TJ-PA/ANALISTA JUDICIÁRIO–PROGRAMADOR/2020) Em um sistema de acesso a uma rede de computadores, os usuários devem cadastrar uma senha de 6 dígitos, que deve ser formada da seguinte maneira:

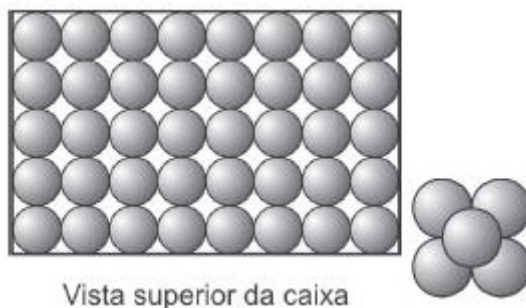
- os 2 primeiros dígitos devem ser letras minúsculas distintas, escolhidas entre as 26 letras do alfabeto;
- os demais 4 dígitos da senha devem ser números inteiros entre 0 e 9, admitindo-se repetição.

Nessa situação, a quantidade de senhas diferentes que podem ser formadas é igual a:

- a) 3.674.
- b) 5.690.
- c) 1.965.600.
- d) 3.276.000.
- e) 6.500.000.

026. (FGV/MEC/DOCUMENTADOR/2009) Em uma caixa, foram colocadas 40 bolas de sinuca, dispostas sobre o fundo da caixa, como apresentado na figura.

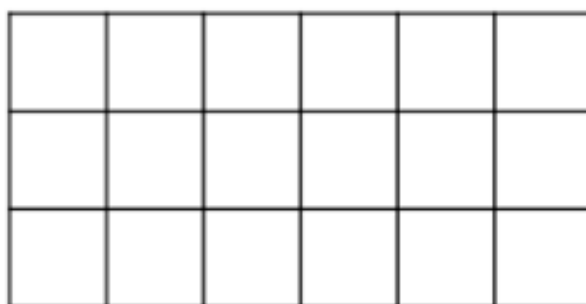
A seguir, outras bolas foram empilhadas sobre as 40 primeiras, de tal forma que cada bola sempre ficasse apoiada sobre outras quatro, como ilustrado abaixo.



Sabendo-se que a construção não foi desrespeitada, assinale a alternativa que apresenta a quantidade máxima possível de bolas de sinuca dentro da caixa.

- a) 112
- b) 100
- c) 96
- d) 86
- e) 68

027. (ESAF/AFRFB/2009) Considere um retângulo formado por pequenos quadrados iguais, conforme a figura abaixo. Ao todo, quantos quadrados de quaisquer tamanhos podem ser contados nessa figura?



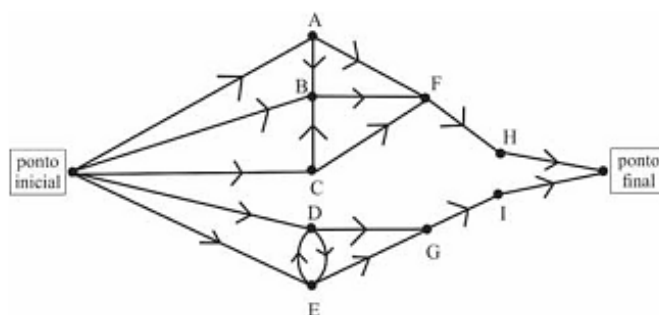
- a) 128
- b) 100
- c) 63
- d) 32
- e) 18

028. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) São realizados três lançamentos, em sequência, de um dado com faces numeradas de 1 a 6. Com os resultados obtidos, em cada

três lançamentos, forma-se um número de três algarismos. Por exemplo: se os resultados obtidos foram, nessa ordem, 2; 6 e 3, o número formado será 263. A quantidade de números diferentes, e que sejam menores do que 500, que podemos formar dessa maneira é igual a:

- a) 499.
- b) 186.
- c) 399.
- d) 144.
- e) 400.

029. (CESPE/PREFEITURA DE SÃO PAULO-SP/ASSISTENTE DE GESTÃO DE POLÍTICAS PÚBLICAS I/2016) A questão da mobilidade urbana é um dos problemas que mais preocupam a população de grandes centros, como a cidade de São Paulo. A figura apresentada mostra as possibilidades de vias, em um centro urbano, para se deslocar de um ponto inicial até um ponto final, passando pelos pontos intermediários A, B, C, D, E, F, G, H ou I. Cada seta indica o sentido do fluxo de uma via ligando dois desses pontos. Dois caminhos que permitem o deslocamento desde o ponto inicial até o ponto final são denominados distintos se um deles incluir pelo menos uma via distinta. Considerando essas informações, a quantidade de caminhos distintos que permitem o deslocamento do ponto inicial até o ponto final é:



- a) inferior a 7.
- b) igual a 7.
- c) igual a 8.
- d) igual a 9.
- e) superior a 9

030. (INSTITUTO CONSULPLAN/FEPAM-RS/ADMINISTRADOR/2023) Em uma loja, os atendimentos aos clientes são sempre feitos por 4 dos seus 7 colaboradores, sendo que, para uma eventualidade qualquer, dois particulares colaboradores, por serem os mais experientes, nunca são escalados pra trabalharem juntos. Sabendo-se que em todos

os grupos de atendimento participa apenas um dos colaboradores mais experientes, a quantidade de grupos distintos de 4 colaboradores que podem ser formados é:

- a) 2
- b) 8
- c) 10
- d) 20
- e) 40

031. (INSTITUTO CONSULPLAN/PREFEITURA DE ORLÂNDIA-SP/AUXILIAR DE EDUCAÇÃO A-2/2023) A direção de uma escola está elaborando o cardápio de merendas que serão servidas ao longo do ano. Ao consultar as regras nutricionais que devem ser seguidas, foi constatado que todos os dias devem ser servidas merendas que contenham uma proteína, um carboidrato, 3 legumes e 2 verduras. Assim, se a escola possui em sua despensa 4 tipos de proteínas, 3 tipos de carboidratos, 8 tipos de legumes e 6 tipos de verduras, o número de merendas distintas que ela poderá servir pertence a qual dos intervalos a seguir?

- a) 1 e 4.999.
- b) 5.000 e 8.999.
- c) 9.000 e 9.999.
- d) 10.000 e 11.000.

032. (FGV/SSP-AM/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR/2015) Uma urna A contém cinco bolas numeradas com os números 1, 3, 5, 7 e 9. Uma urna B também contém cinco bolas, mas numeradas com os números 0, 2, 4, 6 e 8.

Retira-se, aleatoriamente, uma bola de cada urna e somam-se os números das duas bolas. O número de valores diferentes possíveis para essa soma é:

- a) 25
- b) 21
- c) 17
- d) 13
- e) 9

033. (FGV/CGE-MA/AUDITOR/2014) João lançou um dado três vezes seguidas e a soma dos resultados deu 15. O número de maneiras possíveis para a sequência dos três resultados é:

- a) 3
- b) 5
- c) 7

d) 9

e) 10

034. (CESPE/TRE-GO/TÉCNICO JUDICIÁRIO/2015) As prestações de contas das campanhas dos 3 candidatos a governador de determinado estado foram analisadas por 3 servidores do TRE desse estado. Considerando que um servidor pode analisar nenhuma, uma ou mais de uma prestação de contas e que, por coincidência, cada um dos 3 candidatos é parente de um dos 3 servidores, julgue o item que se segue.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuírem as prestações de contas entre os 3 servidores de modo que nenhum deles analise as contas de um parente é superior a 5.

035. (CESPE/MEC/2014) A análise de requerimentos de certificação de entidades educacionais, no âmbito do Ministério da Educação, será realizada por uma equipe formada por, no mínimo, um analista contábil, um analista educacional e um analista processual. Considerando essa situação hipotética, julgue os itens subsecutivos.

A partir de cinco analistas contábeis, sete analistas educacionais e seis analistas processuais, é possível formar mais de 300 equipes distintas com exatamente um analista de cada especialidade em cada equipe.

036. (FCC/TRF-1ª REGIÃO/TÉCNICO JUDICIÁRIO-ÁREA ADMINISTRATIVA/2007) Um técnico judiciário foi incumbido da montagem de um manual referente aos Princípios Fundamentais da Constituição Federal. Sabendo que, excluídas a capa e a contra-capas, a numeração das páginas foi feita a partir do número 1 e, ao concluí-la, constatou-se que foram usados 225 algarismos, o total de páginas que foram numeradas é

a) 97

b) 99

c) 111

d) 117

e) 126

037. (CESPE/SEFAZ-RS/AUDITOR FISCAL DA RECEITA ESTADUAL/2019) Os funcionários de uma repartição foram distribuídos em sete grupos de trabalhos, de modo que cada funcionário participa de exatamente dois grupos, e cada dois grupos têm exatamente um funcionário em comum.

Nessa situação, o número de funcionários da repartição é igual a

a) 7.

b) 14.

- c) 21.
- d) 28.
- e) 35.

038. (INSTITUTO CONSULPLAN/FEPAM-RS/ADMINISTRADOR/2023) Em uma partida de petecas apenas dois jogadores adversários se enfrentarão. Um torneio será realizado nesta modalidade esportiva e contará com 50 jogadores. Foi estabelecido que cada partida será de um set e o competidor que for derrotado duas vezes será eliminado deste torneio, dando a vez para um outro jogador. O número máximo de partidas que poderão ser disputadas para se chegar ao campeão será:

- a) 49
- b) 50
- c) 99
- d) 100
- e) 199

039. (INÉDITA/2023) Em uma lanchonete, há 5 sabores diferentes de sanduíches, 6 sabores diferentes de sucos e 3 sabores de sobremesas. Um pedido é composto por, no máximo, um sanduíche, um suco e uma sobremesa, mas não necessariamente. Sendo assim, é possível que o cliente peça somente um suco ou somente um sanduíche, mas ele não pode pedir dois sanduíches no mesmo pedido. Determine quantos pedidos diferentes podem ser feitos nessa lanchonete.

040. (CESPE/SEFAZ-RS/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO FAZENDÁRIO/2018) A tabela a seguir mostra os preços, em R\$ 100, de passagens aéreas para viagens com origem nas cidades A, B, C, D ou E e para viagens com destino a essas mesmas cidades.

		destino				
		A	B	C	D	E
origem	A	0	3	1	2	5
	B	2	0	2	1	4
	C	1	3	0	2	1
	D	2	5	4	0	3
	E	5	2	1	4	0

Por necessidade de serviço, um funcionário deverá visitar todas essas cidades uma única vez, sempre por via aérea, e deverá partir de alguma delas.

Considerando-se todas as possibilidades de partida, o menor valor a ser gasto com as passagens aéreas é igual a:

- a) R\$ 400.
- b) R\$ 500.
- c) R\$ 600.
- d) R\$ 800.
- e) R\$ 900.

041. (FGV/RECEITA FEDERAL/AUDITOR-FISCAL/2023) O número de anagramas que podem ser formados com as letras da palavra DEMOCRACIA em que todas as vogais estejam juntas e todas as consoantes também estejam juntas é igual a

- a) 3600.
- b) 4800.
- c) 7200.
- d) 12300.
- e) 14400.

042. (INSTITUTO CONSULPLAN/SEED-PR/ÁREA DE CONHECIMENTO: MATEMÁTICA/2022) Suponha que as letras da palavra ÂNGULO precisam ser distribuídas nas seis lacunas a seguir:

O número de maneiras distintas que tais letras podem ser distribuídas de modo que todas as vogais fiquem em uma mesma coluna é:

- a) 18
- b) 36
- c) 72
- d) 144

043. (FGV/SEAD-AP/PROFESSOR DE EDUCAÇÃO BÁSICA-MATEMÁTICA/2022) Arnaldo tem 3 livros de Química, 4 de Física e 2 de Matemática, todos diferentes entre si e deseja arrumá-los em uma prateleira de modo que os livros de Química fiquem juntos e os de Física também. O número de maneiras distintas de Arnaldo arrumar os seus livros na prateleira é igual a

- a) 288.
- b) 576.
- c) 1152.
- d) 3456.
- e) 6912.

044. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR MAPB ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO MATEMÁTICA/2022)

As amigas Ana, Bruna, Carla e Denise vão a uma festa e cada uma tem um vestido. Como querem usar um vestido diferente, decidiram que cada uma irá usar o vestido de uma das outras. O número de maneiras distintas de fazerem isso é igual a

- a) 12.
- b) 15.
- c) 9.
- d) 18.
- e) 6.

045. (FGV/TJ-PI/ANALISTA JUDICIÁRIO – OFICIAL DE JUSTIÇA/2015) Em um saco A há somente fichas vermelhas e em um saco B há somente fichas amarelas, sendo 7 fichas em cada saco. Retiram-se 3 fichas do saco A, que são então colocadas no saco B. Depois, retiram-se aleatoriamente 3 fichas do saco B, que são então colocadas no saco A. É correto concluir que ao final do procedimento descrito:

- a) há no máximo 4 fichas vermelhas no saco A;
- b) há exatamente 4 fichas vermelhas no saco
- c) há exatamente 4 fichas amarelas no saco
- d) o número de fichas amarelas no saco A é menor do que o número de fichas vermelhas no saco B;
- e) o número de fichas vermelhas no saco A é igual ao número de fichas amarelas no saco B.

046. (FCC/TRT-4ª REGIÃO-RS/ANALISTA JUDICIÁRIO-TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO/2015) Em uma caixa há 30 bolas, numeradas de 1 a 30, todas com numeração diferente. O menor número de bolas que devem ser retiradas ao acaso dessa caixa para se obter, com certeza, duas bolas com numeração ímpar e menor que 19 é igual a

- a) 24.
- b) 23.
- c) 21.
- d) 19.
- e) 22.

047. (FCC/TJ-PE/2012) A palavra GOTEIRA é formada por sete letras diferentes. Uma sequência dessas letras, em outra ordem, é TEIGORA. Podem ser escritas 5040 sequências diferentes com essas sete letras. São 24 as sequências que terminam com as letras GRT, nessa ordem, e começam com as quatro vogais. Dentre essas 24, a sequência AEIOGRT é a primeira delas, se forem listadas alfabeticamente. A sequência IOAEGRT ocuparia, nessa listagem alfabética, a posição de número:

- a) 11
- b) 13
- c) 17
- d) 22
- e) 23

048. (FGV/CODESP-SP/ADVOGADO/2010) HÁ seis contêineres diferentes que deverão ser empilhados, três mais pesados embaixo e três mais leves em cima. O número de maneiras de se fazer essa arrumação, mantendo os três mais pesados embaixo e os três mais leves em cima é:

- a) 18
- b) 6
- c) 9
- d) 36
- e) 72

049. (CESPE/BANCO DO BRASIL/ESCRITURÁRIO/2008) A quantidade de permutações distintas que podem ser formadas com as 7 letras da palavra REPETIR, que começam e terminam com R, é igual a 60.

050. (IBFC/SEC-BA/PROFESSOR DA EDUCAÇÃO BÁSICA-MATEMÁTICA/2023) Com os algarismos do conjunto $\{0, 2, 3, 4, 5\}$ podemos formar números de três algarismos distintos. A quantidade de número formados nestas condições é:

- a) 120
- b) 20
- c) 32
- d) 24
- e) 48

051. (FGV/MRE/OFICIAL DE CHANCELARIA/2016) André, Beatriz e Carlos são adultos, Laura e Júlio são crianças e todos vão viajar em um automóvel com 5 lugares, sendo 2 na frente e 3 atrás. Dos adultos, somente Carlos não sabe dirigir. As crianças viajarão atrás, mas Júlio faz questão de ficar em uma janela. O número de maneiras diferentes pelas quais essas pessoas podem ocupar os cinco lugares do automóvel é:

- a) 12
- b) 16
- c) 18

d) 20

e) 24

052. (CESPE/ANVISA/TÉCNICO ADMINISTRATIVO/2016) Situação hipotética: A ANVISA, com objetivo de realizar a regulação de um novo medicamento, efetua as análises laboratoriais necessárias. Essas análises são assistidas por um grupo de 4 dos seus 8 técnicos farmacêuticos. Desses técnicos, 3 possuem cargo de chefia de equipe e por isso não trabalham juntos. Assertiva: Nessa situação, considerando que em cada uma das equipes participa sempre apenas um dos três técnicos farmacêuticos chefes, então a quantidade de equipes distintas com 4 técnicos farmacêuticos que poderão ser formadas é inferior a 25.

053. (CESPE/MPOG/ANALISTA EM TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO/2015) Determinado órgão público é composto por uma diretoria geral e quatro secretarias; cada secretaria é formada por três diretorias; cada diretoria tem quatro coordenações; cada coordenação é constituída por cinco divisões, com um chefe e sete funcionários subalternos em cada divisão.

A respeito desse órgão público, julgue o item seguinte, sabendo que cada executivo e cada funcionário subalterno só pode ocupar um cargo nesse órgão.

Se, entre onze servidores previamente selecionados, forem escolhidos: sete para compor determinada divisão, um para chefiar essa divisão, um para a chefia da coordenação correspondente, um para a diretoria e um para a secretaria, haverá menos de 8.000 maneiras distintas de se fazer essas escolhas.

054. (CESPE/FUB/2015) Com as cinquenta e duas cartas de um baralho, é possível formar mais de 2.500.000 jogos distintos de 5 cartas.

055. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL/2014) Um batalhão é composto por 20 policiais: 12 do sexo

- masculino e 8 do sexo feminino. A região atendida pelo batalhão é
- composta por 10 quadras e, em cada dia da semana, uma dupla de
- policiais policia cada uma das quadras.

Com referência a essa situação, julgue o item subsequente.

Se a escala dos policiais for feita de modo a diversificar as duplas que policiam as quadras, então, se determinada dupla policiar a quadra X em determinado dia, essa mesma dupla voltará a policiar a quadra X somente mais de seis meses após aquele dia.

056. (CESPE/PGE-PE/ANALISTA ADMINISTRATIVO DE PROCURADORIA – CALCULISTA/2019) Entre os 12 processos administrativos de determinado setor público, 5 se referem a

adicional de periculosidade. Para agilidade na discussão e no julgamento, esses 12 processos serão agrupados em pares. Nesse caso, a quantidade de pares de processos distintos que podem ser formados de modo que pelo menos um dos processos se refira a adicional de periculosidade é igual a 35.

057. (CESPE/TC-DF/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA/2014) Considerando que, em um planejamento de ações de auditoria, a direção de um órgão de controle tenha mapeado a existência de 30 programas de governo passíveis de análise, e sabendo que esse órgão dispõe de 15 servidores para a montagem das equipes de análise e que cada equipe deverá ser composta por um coordenador, um relator e um técnico, julgue os próximos itens. A quantidade de maneiras distintas de serem escolhidos 3 dos referidos servidores para a montagem de uma equipe de análise é superior a 2.500.

058. (CESPE/TC-DF/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA/2014) Considerando que, em um planejamento de ações de auditoria, a direção de um órgão de controle tenha mapeado a existência de 30 programas de governo passíveis de análise, e sabendo que esse órgão dispõe de 15 servidores para a montagem das equipes de análise e que cada equipe deverá ser composta por um coordenador, um relator e um técnico, julgue os próximos itens. A quantidade de maneiras distintas de se escolherem 3 desses programas para serem acompanhados pelo órgão é inferior a 4.000.

059. (CESPE/SAEB-BA/2011) O número total de partidas em um campeonato de pingue-pongue com 20 participantes em que cada competidor jogue uma única vez com cada um dos demais é igual a:

- a) 400
- b) 380
- c) 200
- d) 190

060. (CESPE/TJ-SE/TÉCNICO JUDICIÁRIO/2014) Um grupo de 15 turistas que planeja passear pelo rio São Francisco, no Canyon do Xingó, em Sergipe, utilizará, para o passeio, três barcos: um amarelo, um vermelho e um azul. Cada barco tem capacidade máxima para 8 ocupantes e nenhum deles deixará o porto com menos de 3 ocupantes.

Com base nessa situação hipotética, julgue os itens seguintes.

A quantidade de maneiras distintas de escolher 8 turistas para ocupar o barco azul e 7 para ocupar o barco amarelo é inferior a $8^2 \times 7^2$.

061. (CESPE/TJ-SE/TÉCNICO JUDICIÁRIO/2014) Um grupo de 15 turistas que planeja passear pelo rio São Francisco, no Canyon do Xingó, em Sergipe, utilizará, para o passeio, três barcos:

um amarelo, um vermelho e um azul. Cada barco tem capacidade máxima para 8 ocupantes e nenhum deles deixará o porto com menos de 3 ocupantes.

Com base nessa situação hipotética, julgue os itens seguintes.

A quantidade de maneiras distintas de distribuir os 15 turistas pelos 3 barcos, de forma que cada barco seja ocupado por exatamente 5 turistas, é superior a $2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^2$.

062. (CESPE/MEC/2014) A análise de requerimentos de certificação de entidades educacionais, no âmbito do Ministério da Educação, será realizada por uma equipe formada por, no mínimo, um analista contábil, um analista educacional e um analista processual. Considerando essa situação hipotética, julgue os itens subsecutivos.

A partir de cinco analistas contábeis, sete analistas educacionais e seis analistas processuais, a quantidade de maneiras distintas de se formar equipes com exatamente três analistas de cada especialidade em cada equipe é superior a 5.000.

063. (CESPE/BANCO DO BRASIL/ESCRITURÁRIO/2008) Caso as senhas de acesso dos clientes aos caixas eletrônicos de certa instituição bancária contenham 3 letras das 26 do alfabeto, admitindo-se repetição, nesse caso, a quantidade dessas senhas que têm letras repetidas é superior a 2×10^3 .

064. (FCC/SEGEF-MA/AUDITOR FISCAL DA RECEITA ESTADUAL/2016) Jair tem 8 primos, dos quais irá convidar 5 para um jantar em sua casa. Ocorre que 2 dos 8 primos só podem ir ao jantar se forem juntos. O total de escolhas diferentes dos 5 convidados que Jair pode fazer para o jantar é igual a

- a) 40.
- b) 56.
- c) 30.
- d) 26.
- e) 36.

065. (FCC/DPE-SP/ANALISTA DE SISTEMAS/2015) Para formar uma senha de quatro letras é permitido o uso de uma letra A, uma letra B, duas letras C e três letras D. Dentre todas as senhas possíveis nesse sistema, o número daquelas que tem exatamente três letras diferentes supera o número das demais em

- a) 28.
- b) 24.
- c) 42.
- d) 36.
- e) 30.

066. (FCC/AL-AP/ANALISTA LEGISLATIVO-ADMINISTRADOR/2020) Há 51 pessoas em uma fila. Algumas pessoas dessa fila serão sorteadas. O menor número de pessoas que devem ser sorteadas para garantir que dentre elas haja pelo menos duas que são vizinhas na fila é:

- a) 25
- b) 27
- c) 24
- d) 26
- e) 28

067. (FCC/BANRISUL/ESCRITURÁRIO/2019) Ana e Beatriz são as únicas mulheres que fazem parte de um grupo de 7 pessoas. O número de comissões de 3 pessoas que poderão ser formadas com essas 7 pessoas, de maneira que Ana e Beatriz não estejam juntas em qualquer comissão formada, é igual a:

- a) 20.
- b) 15.
- c) 30.
- d) 18.
- e) 25.

068. (FCC/PREFEITURA DE RECIFE-PE/ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA/2019) Uma determinada secretaria municipal conta com dois assessores (A1 e A2) e cinco supervisores (S1, S2, S3, S4 e S5). Deseja-se formar uma comissão formada por quatro membros, pelo menos um dos quais deve ser um assessor e os demais, supervisores. Ainda, se A1 for membro da comissão, S1 não deve ser. Nessas condições, podem ser formadas:

- a) 15 comissões diferentes.
- b) 30 comissões diferentes.
- c) 20 comissões diferentes.
- d) 44 comissões diferentes.
- e) 60 comissões diferentes.

069. (FGV/BANESTES/ANALISTA DE COMUNICAÇÃO/2023) Em uma empresa de projetos habitacionais, a equipe é formada por 6 engenheiros, 5 arquitetos e 4 paisagistas.

A fim de elaborar um novo projeto, serão escolhidos 4 desses profissionais, de modo que haja pelo menos um de cada habilitação profissional.

A quantidade de diferentes quartetos que podem assumir esse novo projeto é igual a:

- a) 300.
- b) 420.
- c) 480.
- d) 540.
- e) 720.

070. (FGV/RECEITA FEDERAL/ANALISTA TRIBUTÁRIO/2023) A quantidade de anagramas da palavra SAUDADE nos quais todas as vogais estejam juntas é igual a

- a) 98.
- b) 144.
- c) 186.
- d) 204.
- e) 288.

071. (FCC/SEGEF-MA/ANALISTA EXECUTIVO-PROGRAMADOR DE SISTEMAS/2018) No setor administrativo de uma empresa, há quatro tipos de cargos: estagiários, técnicos, gerentes e diretores. Alguns funcionários desse setor comporão um grupo que será transferido para o setor financeiro da empresa. Composto-se o grupo com funcionários escolhidos ao acaso, o número mínimo de funcionários que deverá compor o grupo para que se tenha certeza de que nele haverá quatro funcionários de um mesmo cargo é igual a:

- a) 17.
- b) 15.
- c) 13.
- d) 16.
- e) 14.

072. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO/2018) Uma pessoa decidiu criar uma senha com dois algarismos ímpares diferentes e uma vogal, em qualquer ordem. O número total de senhas diferentes que ela pode criar é igual a

- a) 600.
- b) 450.
- c) 300.
- d) 900.
- e) 550.

073. (FGV/SENADO FEDERAL/ANALISTA LEGISLATIVO/2008) Em uma reunião todas as pessoas se cumprimentaram, havendo ao todo 120 apertos de mão. O número de pessoas presentes nessa reunião foi:

- a) 14
- b) 15
- c) 16
- d) 18
- e) 20

074. (ESAF/AFRFB/2009) Sabe-se que os pontos A,B,C, D, E, F e G são coplanares, ou seja, estão localizados no mesmo plano. Sabe-se, também, que destes sete pontos, quatro

são colineares, ou seja, estão numa mesma reta. Assim, o número de retas que ficam determinadas por estes sete pontos é igual a:

- a) 16
- b) 28
- c) 15
- d) 24
- e) 32

075. (ESAF/AFRFB/2014) Um polígono regular possui 48 diagonais que não passam pelo seu centro. A partir desta informação, pode-se concluir que o número de lados desse polígono é igual a:

- a) 12
- b) 36
- c) 24
- d) 48
- e) 22

076. (CESPE/FUB/CONHECIMENTOS BÁSICOS/2015) (♥), espadas (♠), ouros (♦) e paus (♣), viradas para baixo. As cartas do baralho, em ordem crescente de importância, são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Q (dama), J (valete), K (rei) e A (ás). Nesse jogo, cada jogador recebe cinco cartas e pode descartar algumas ou todas e receber outras novas, na mesma quantidade, de modo a ficar

sempre com cinco cartas na mão. O jogador com o melhor jogo, isto é, com a sequência de cinco cartas que vale mais pontos, ganha a rodada. As sequências de jogos vencedoras no pôquer fechado, em ordem crescente de importância, são:

- par – formado por duas cartas de mesmo valor e três outras sem relação (por exemplo: [Q♣] [Q♠] [2♥] [4♥] [5♣]);
- dois pares – formado por duas cartas de mesmo valor, mais outras duas também de mesmo valor (mas de valor diferente do primeiro par) e uma carta não relacionada com as dos pares (por exemplo: [3♥] [3♦] [10♠] [10♥] [A♠]);
- trinca – formado por três cartas de mesmo valor e outras duas sem relação (por exemplo: [J♠] [J♦] [J♥] [6♥] [7♥]);
- straight (sequência) – formado por cinco cartas em sequência de naipes diferentes (por exemplo: [5♣] [6♠] [7♥] [8♥] [9♣]);
- flush – formado por cinco cartas do mesmo naipe (por exemplo: [4♣] [5♣] [10♣] [Q♣] [J♣]);
- full house – formado por um par e uma trinca (por exemplo: [Q♣] [Q♠] [A♥] [A♠] [A♦]);

- quadra – formado por quatro cartas do mesmo valor e uma carta qualquer (por exemplo: [10♣] [10♠] [10♥] [10♦] [3♠]);
- straight flush – formado por cinco cartas em sequência e do mesmo naipe (por exemplo: [7♥] [8♥] [9♥] [10♥] [Q♥]);
- royal straight flush – formado pela sequência máxima, isto é, dez, dama, valete, rei e ás, todas do mesmo naipe (por exemplo: [10♠] [Q♠] [J♠] [K♠] [A♠]).

Com base nessas informações, julgue os seguintes itens, a respeito do jogo de pôquer fechado.

A quantidade de pares simples, e nenhum jogo melhor, que podem ser formados é igual a $6 \times 44 \times C_{13,9}$.

077. (ESAF/AFRFB/CARGO/2009–ANULADA) De quantas maneiras podem sentar-se três homens e três mulheres em uma mesa redonda, isto é, sem cabeceira, de modo a se ter sempre um homem entre duas mulheres e uma mulher entre dois homens?

- 72
- 36
- 216
- 820
- 360

078. (CESPE/ANAC/ESPECIALISTA EM REGULAÇÃO–ECONOMIA/2009) Considere que, em uma empresa, seja utilizado sistema de códigos com apenas dois tipos de símbolos (1 e 2), sendo cada código formado por uma sequência desses símbolos, cuja ordem é igual à soma dos algarismos que formam o código, a exemplo dos códigos distintos 1, 11, 12 e 121, que são de ordem 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Considere, ainda, que $s(0) = 1$ e que $s(n)$ é igual ao número de códigos distintos de ordem n , $n \geq 1$,
Existem, no máximo, 55 códigos distintos de ordem menor ou igual a 10.

079. (ITA/2015) Dispomos de seis cores diferentes. Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras isto pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica à outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo?

- 40
- 36
- 35
- 32
- 30

080. (IBFC/MPE-SP/AUXILIAR DE PROMOTORIA–MOTORISTA/2011) Um livro de ensino médio tem 262 páginas. Os exercícios estão dispostos nas páginas numeradas com múltiplos de 5 e as soluções dos exercícios estão dispostas nas páginas numeradas com múltiplos de 13. O número de folhas que não figuram exercícios ou soluções é de:

- a) 64
- b) 67
- c) 124
- d) 190

GABARITO

- | | | |
|-------|---------|-------------|
| 1. 36 | 35. E | 69. e |
| 2. C. | 36. c | 70. b |
| 3. E. | 37. c | 71. c |
| 4. B. | 38. c | 72. a |
| 5. C. | 39. 168 | 73. c |
| 6. D. | 40. b | 74. a |
| 7. E. | 41. c | 75. a |
| 8. E | 42. c | 76. C |
| 9. b | 43. d | 77. Anulada |
| 10. b | 44. c | 78. E |
| 11. c | 45. e | 79. e |
| 12. c | 46. b | 80. b |
| 13. e | 47. c | |
| 14. c | 48. d | |
| 15. d | 49. C | |
| 16. E | 50. e | |
| 17. E | 51. b | |
| 18. e | 52. E | |
| 19. C | 53. C | |
| 20. d | 54. C | |
| 21. d | 55. C | |
| 22. E | 56. E | |
| 23. d | 57. C | |
| 24. e | 58. E | |
| 25. e | 59. d | |
| 26. b | 60. E | |
| 27. d | 61. C | |
| 28. d | 62. C | |
| 29. e | 63. E | |
| 30. d | 64. d | |
| 31. d | 65. e | |
| 32. e | 66. b | |
| 33. e | 67. c | |
| 34. C | 68. c | |

GABARITO COMENTADO

020. (IBFC/PREFEITURA DE DOURADOS-MS/FISCAL DE OBRAS/2022) De acordo com a palavra SOFTWARE, a quantidade de anagramas (palavras com ou sem sentido) que apresentam as letras FTW juntas e em qualquer ordem corresponde a:

- a) 720
- b) 3600
- c) 540
- d) 4320



Como as letras FTW devem ficar juntas, podemos considerar o conjunto FTW como uma única letra. Dessa forma, temos as seguintes opções de permutação: FTW, S, O, R, E, A. Observe que temos uma permutação de 6 elementos sem repetição. Então, devemos usar a equação:

$$P_n = n!$$

Sabendo que $n = 6$, o número total de configurações é de:

$$P_6 = 6!$$

$$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P_6 = 30 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P_6 = 120 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P_6 = 360 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\therefore P_6 = 720 \text{ possibilidades}$$

Além disso, dentro do conjunto FTW, as 3 letras podem ser permutadas entre si, pois a única condição é que estejam juntas. Temos, então, que o total de possibilidades será de:

$$Total = P_6 \cdot P_3$$

$$Total = 720 \cdot 3!$$

$$Total = 720 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$Total = 720 \cdot 6$$

$$\therefore Total = 4320 \text{ possibilidades}$$

Letra d.

021. (INSTITUTO CONSULPLAN/PREFEITURA DE ORLÂNDIA-SP/PROCURADOR JURÍDICO/2023)
LUCIANA está cursando as seguintes 5 disciplinas em seu curso de Estatística: Análise de Regressão; Probabilidade II; Inferência; Estatística Multivariada; e, Teoria de Resposta ao Item. Para cada disciplina, Luciana possui dois livros que precisam ser organizados em uma prateleira de modo que os livros da mesma disciplina permaneçam sempre juntos. Dessa forma, quantas maneiras distintas Luciana pode organizar os seus livros na prateleira?

- a) 768
- b) 1.536
- c) 2.848
- d) 3.840



Faremos a organização dos livros em dois passos:

- permutar livremente os 5 grupos (ou disciplinas) de livros, de modo a garantir que os livros de cada matéria estejam juntos;
- permutar os livros dentro de cada grupo (ou disciplina).

Inicialmente, calcularemos as permutações entre as 5 disciplinas. Para isso, basta fazermos a permutação de 5 elementos. Temos:

$$\text{Permutação simples} = P_5 = 5!$$

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P_5 = 20 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P_5 = 60 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\therefore P_5 = 120 \text{ possibilidades}$$

Em seguida, os dois livros de cada disciplina também podem permutar entre si. Logo, temos mais uma permutação de 2 elementos para cada disciplina. Observe:

$$\text{Permutação livros entre si} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\text{Permutação livros entre si} = 2^5 = 32$$

Usando o princípio fundamental da contagem, o total de possibilidades final será de:

$$\text{Total} = 120 \cdot 32$$

$$\therefore \text{Total} = 3840$$

Letra d.

022. (CEBRASPE/PETROBRAS/2021) Uma empresa distribuidora de combustíveis atendia, ao término do ano de 2020, apenas 30 clientes. Após a implementação de medidas administrativas, a quantidade de novos clientes dessa empresa, no primeiro semestre de 2021 (contada sempre em relação ao mês anterior), aumentou em progressão geométrica. Na tabela a seguir, está registrada a quantidade total de clientes da empresa no final dos 4 primeiros meses de 2021.

total de clientes da empresa				
meses	Janeiro 2021	Fevereiro 2021	Março 2021	Abril 2021
total de clientes	32	36	44	60

Supondo-se que, no final de março de 2021, três clientes devessem ter sido aleatoriamente escolhidos para responder a um questionário de avaliação da empresa, então a quantidade de formas diferentes de fazer essa escolha, de modo que, no grupo escolhido, houvesse pelo menos 2 clientes que tivessem ingressado na empresa antes de 2021, é inferior a 4.000.



A empresa tem 30 clientes que entraram antes de 2021. Então, ela precisaria selecionar: 2 clientes de antes de 2021 e 1 cliente de 2021; ou 3 clientes de antes de 2021. Assim, o número total de possibilidades será:

$$N = 2 \cdot \binom{30}{2} + \binom{30}{3}$$

Vamos calcular cada termo isoladamente:

$$\binom{30}{2} = \frac{30!}{28! 2!} = \frac{30 \cdot 29}{2 \cdot 1} = \frac{870}{2}$$

$$\binom{30}{3} = \frac{30!}{27! 3!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 29 \cdot 28 = 4060$$

Então, o número total de formas de selecionar os clientes é:

$$N = 2 \cdot \frac{870}{2} + 4060 = 870 + 4060 = 4930$$

Errado.

023. (FGV/MP-SC/AUXILIAR DO MINISTÉRIO PÚBLICO/2022) QUATRO casais foram ao cinema e vão sentar em 8 cadeiras consecutivas em uma mesma fileira. O número de maneiras distintas de os 4 casais se sentarem nas 8 cadeiras, de modo que cada mulher se sente ao lado de seu marido, é:

- a) 24;
- b) 96;
- c) 256;
- d) 384;
- e) 576.



Podemos permutar livremente os 4 casais. Assim, teremos:

$$N_1 = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Em seguida, podemos trocar de ordem cada esposa com seu marido. Assim, teremos:

$$N = (2!)^4 \cdot 24 = 2^4 \cdot 24 = 16 \cdot 24 = 384$$

Letra d.

024. (VUNESP/TJ-SP/ESCREVENTE/2021) Na gaveta de camisetas de Jeferson há 5 camisetas pretas, 7 camisetas vermelhas e 9 camisetas azuis. O menor número de camisetas que Jeferson precisará retirar da gaveta, de maneira aleatória e sem saber quais camisetas estão saindo, para ter certeza de ter retirado pelo menos uma camiseta preta e uma camiseta azul, é

- a) 14.
- b) 18.
- c) 16.
- d) 20.
- e) 17



Na pior das hipóteses, Jeferson poderia retirar as 7 camisetas vermelhas e, depois, as 9 camisetas azuis. Assim, ele teria retirado 16 camisetas - e não veio nenhuma preta. Mas a próxima camiseta (17.^a), necessariamente, seria preta. Assim, com 17 camisas retiradas, é possível garantir, necessariamente, que ele teria tirado pelo menos uma preta e uma azul.

Letra e.

025. (CESPE/TJ-PA/ANALISTA JUDICIÁRIO-PROGRAMADOR/2020) Em um sistema de acesso a uma rede de computadores, os usuários devem cadastrar uma senha de 6 dígitos, que deve ser formada da seguinte maneira:

- os 2 primeiros dígitos devem ser letras minúsculas distintas, escolhidas entre as 26 letras do alfabeto;

- os demais 4 dígitos da senha devem ser números inteiros entre 0 e 9, admitindo-se repetição.

Nessa situação, a quantidade de senhas diferentes que podem ser formadas é igual a:

- a) 3.674.
- b) 5.690.
- c) 1.965.600.
- d) 3.276.000.
- e) 6.500.000.



A senha deve ter 6 algarismos. Vamos colocar as 6 posições, especificando em quais delas devemos ter letras ou números.

Na primeira posição, devemos ter qualquer letra – são 26 opções. Na segunda posição, podemos ter qualquer letra que não tenha sido a escolhida para a primeira posição. Logo, as possibilidades se reduzem para 25.

No caso de números, é possível a repetição, portanto, temos 10 opções de números, em cada uma das quatro posições a ser ocupada.

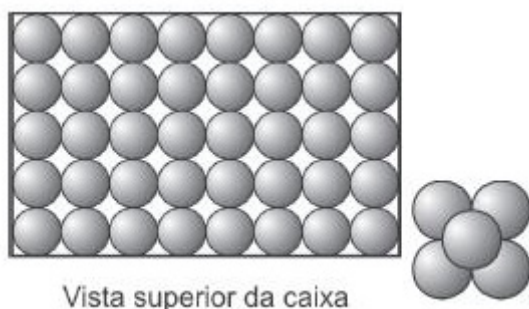
$$\begin{array}{ccccccc}
 26 & \times & 25 & \times & 10 & \times & 10 & \times & 10 & \times & 10 & = & 6500000 \\
 \hline
 \text{Letra} & & \text{Letra} & & \text{N}^{\circ} & & \text{N}^{\circ} & & \text{N}^{\circ} & & \text{N}^{\circ} & & \text{Total}
 \end{array}$$

São possíveis 6.500.000 combinações.

Letra e.

026. (FGV/MEC/DOCUMENTADOR/2009) Em uma caixa, foram colocadas 40 bolas de sinuca, dispostas sobre o fundo da caixa, como apresentado na figura.

A seguir, outras bolas foram empilhadas sobre as 40 primeiras, de tal forma que cada bola sempre ficasse apoiada sobre outras quatro, como ilustrado abaixo.

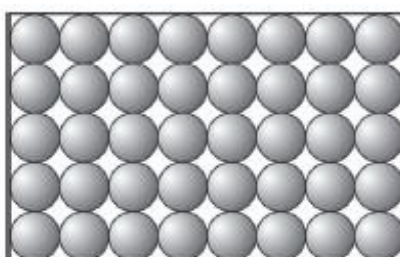


Sabendo-se que a construção não foi desrespeitada, assinale a alternativa que apresenta a quantidade máxima possível de bolas de sinuca dentro da caixa.

- a) 112
- b) 100
- c) 96
- d) 86
- e) 68

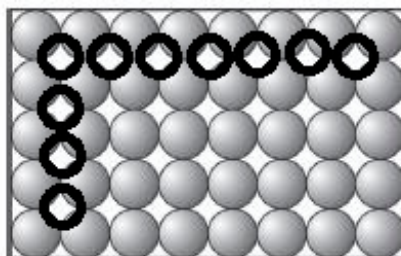


No piso da caixa, temos 8 colunas e 5 linhas de bolas.



Vista superior da caixa

Como ilustrado pelo problema, é possível empilhar bolas nos espaços vazios deixados por essas. Perceba que só poderemos colocar 7 colunas e 4 linhas de bolas sobre essas. Essa situação está ilustrada a seguir.



No 3º andar de bolinhas, podemos empilhar, de forma análoga, mais 6 colunas e 3 linhas. No 4º andar, podemos empilhar mais 5 colunas e 2 linhas. Por fim, chegamos ao 5º andar, onde podemos empilhar mais 4 colunas e 1 linha de bolinhas. Não é possível mais empilhar nada sobre o 5º andar.

Sendo assim, o número total de bolinhas empilhadas é:

	Colunas	Linhas	Total
1º Andar	8	5	$8 \cdot 5 = 40$
2º Andar	7	4	$7 \cdot 4 = 28$
3º Andar	6	3	$6 \cdot 3 = 18$

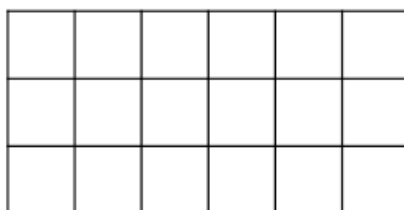
4º Andar	5	2	$5.2 = 10$
5º Andar	4	1	$4.1 = 4$
Total	$40 + 28 + 18 + 10 + 4$		

O total de bolinhas empilhadas é, portanto:

$$N = 40 + 28 + 18 + 10 + 4 = 100$$

Letra b.

027. (ESAF/AFRFB/2009) Considere um retângulo formado por pequenos quadrados iguais, conforme a figura abaixo. Ao todo, quantos quadrados de quaisquer tamanhos podem ser contados nessa figura?



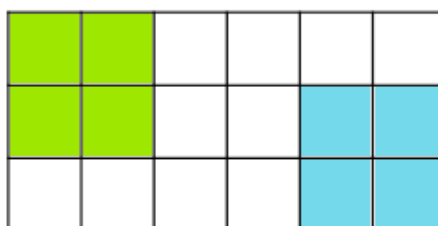
- a) 128
- b) 100
- c) 63
- d) 32
- e) 18



Perceba que é possível formar quadrados de tamanho 1, 2 e 3 nessa figura.

Para os quadrados de tamanho 1, podemos escolher qualquer uma das 6 colunas e qualquer uma das 3 linhas. São, portanto, $6.3 = 18$ possibilidades.

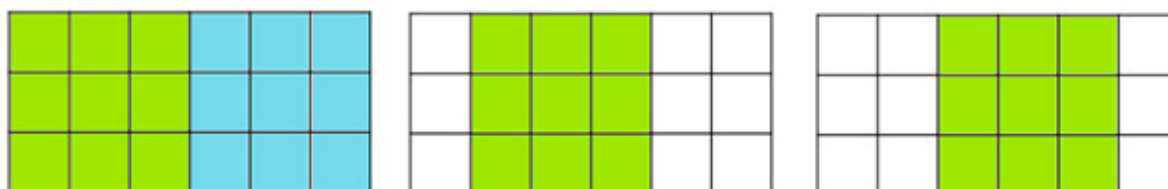
Para os quadrados de tamanho 2, já é um pouco diferente.



O quadrado azul no canto inferior direito é o último quadrado possível – e ele se inicia na 2.^a linha e na 5.^a coluna. De fato, não é possível que um quadrado de tamanho 2 comece na última

linha ou na última coluna, pois a figura acabaria. Sendo assim, há $5.2 = 10$ possibilidades de quadrados de tamanho 2.

Por fim, quanto aos quadrados de tamanho 3, eles só podem iniciar na 1.^a linha e só há quatro possibilidades de coluna. Eles não podem se iniciar nem na 5.^a nem na última coluna, pois, nesse caso, a figura acabaria.



Sendo assim, há $4.1 = 4$ possibilidades de quadrados de tamanho 3.

Tamanho	Colunas	Linhas	Total
1	6	3	$6.3 = 18$
2	5	2	$5.2 = 10$
3	4	1	$4.1 = 4$
Total			$18+10+4 = 32$

Letra d.

028. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) São realizados três lançamentos, em sequência, de um dado com faces numeradas de 1 a 6. Com os resultados obtidos, em cada três lançamentos, forma-se um número de três algarismos. Por exemplo: se os resultados obtidos foram, nessa ordem, 2; 6 e 3, o número formado será 263. A quantidade de números diferentes, e que sejam menores do que 500, que podemos formar dessa maneira é igual a:

- a) 499.
- b) 186.
- c) 399.
- d) 144.
- e) 400.

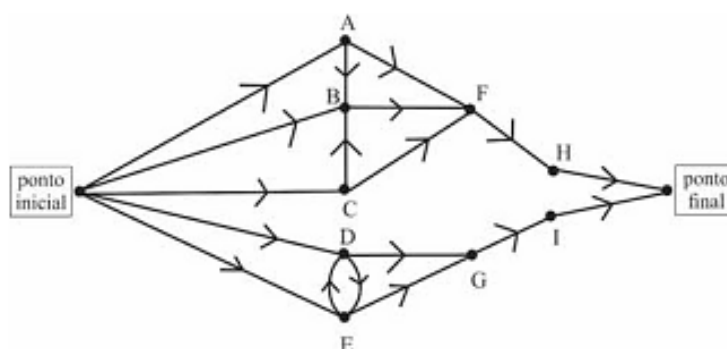


Como queremos os números menores que 500, a única restrição do problema é que o primeiro dado seja um dos números {1, 2, 3, 4}. São, portanto, 4 opções para o primeiro lançamento. Tome cuidado, porque o enunciado fala em “menores do que 500”, portanto, o próprio número 500 não nos interessa.

$$\begin{array}{r} 4 \times 6 \times 6 = 144 \\ \hline \text{Total} \end{array}$$

Letra d.

029. (CESPE/PREFEITURA DE SÃO PAULO-SP/ASSISTENTE DE GESTÃO DE POLÍTICAS PÚBLICAS I/2016) A questão da mobilidade urbana é um dos problemas que mais preocupam a população de grandes centros, como a cidade de São Paulo. A figura apresentada mostra as possibilidades de vias, em um centro urbano, para se deslocar de um ponto inicial até um ponto final, passando pelos pontos intermediários A, B, C, D, E, F, G, H ou I. Cada seta indica o sentido do fluxo de uma via ligando dois desses pontos. Dois caminhos que permitem o deslocamento desde o ponto inicial até o ponto final são denominados distintos se um deles incluir pelo menos uma via distinta. Considerando essas informações, a quantidade de caminhos distintos que permitem o deslocamento do ponto inicial até o ponto final é:



- a) inferior a 7.
- b) igual a 7.
- c) igual a 8.
- d) igual a 9.
- e) superior a 9



Perceba que o primeiro passo pode levar aos pontos A, B, C, D ou E. Tem-se, portanto, 5 opções.

Saindo dos pontos A e C, tem-se dois caminhos para cada um.

Saindo do ponto B, tem-se apenas um único caminho:

PI – B – F – H – PF

Saindo do ponto D, tem-se três caminhos possíveis:

PI – D – G – I – PF

PI – D – E – G – I – PF

PI – D – E – D – G – I – PF.

Saindo do ponto E, tem-se também três caminhos possíveis:

PI – E – G – I – PF

PI – E – D – G – I – PF

PI – E – D – E – G – I – PF

	Passo 1	Continuação	Total
OU	1 opção (B)	1 opção	1.1 = 1
	2 opções (A e C)	2 opções	2.2 = 4
	2 opções (D e E)	3 opções	2.3 = 6
			1 + 4 + 6 = 11

São, portanto, 11 caminhos.

Letra e.

030. (INSTITUTO CONSULPLAN/FEPAM-RS/ADMINISTRADOR/2023) Em uma loja, os atendimentos aos clientes são sempre feitos por 4 dos seus 7 colaboradores, sendo que, para uma eventualidade qualquer, dois particulares colaboradores, por serem os mais experientes, nunca são escalados pra trabalharem juntos. Sabendo-se que em todos os grupos de atendimento participa apenas um dos colaboradores mais experientes, a quantidade de grupos distintos de 4 colaboradores que podem ser formados é:

- a) 2
- b) 8
- c) 10
- d) 20
- e) 40



Inicialmente, note que a ordem não importa nesta situação, logo, usaremos a fórmula de combinação. Segue a fórmula:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Perceba que, em todo grupo, um trabalhador experiente deve participar. Logo, temos dois trabalhadores experientes para escolhermos apenas um. Observe:

$$C_1^2 = \frac{2!}{(2-1)! \cdot 1!}$$

$$C_1^2 = \frac{2!}{(1)! \cdot 1!}$$

$$\therefore C_1^2 = 2 \text{ possibilidades}$$

Além disso, dos outros 5 trabalhadores não experientes restantes, precisamos escolher apenas três para completar a formação do grupo de 4 trabalhadores. Dessa forma, temos:

$$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!}$$

$$C_3^5 = \frac{5!}{(2)! \cdot 3!}$$

$$C_3^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{(2)! \cdot 3!}$$

$$C_3^5 = \frac{5 \cdot 4}{2!}$$

$$\therefore C_3^5 = 10 \text{ possibilidades}$$

Agora, basta multiplicarmos as duas condições. Por fim, a quantidade de formas distintas que podemos formar esse grupo com 4 colaboradores será de:

$$Total = 2 \cdot 10$$

$$\therefore Total = 20 \text{ possibilidades}$$

Letra d.

031. (INSTITUTO CONSULPLAN/PREFEITURA DE ORLÂNDIA-SP/AUXILIAR DE EDUCAÇÃO A-2/2023) A direção de uma escola está elaborando o cardápio de merendas que serão

servidas ao longo do ano. Ao consultar as regras nutricionais que devem ser seguidas, foi constatado que todos os dias devem ser servidas merendas que contenham uma proteína, um carboidrato, 3 legumes e 2 verduras. Assim, se a escola possui em sua despensa 4 tipos de proteínas, 3 tipos de carboidratos, 8 tipos de legumes e 6 tipos de verduras, o número de merendas distintas que ela poderá servir pertence a qual dos intervalos a seguir?

- a) 1 e 4.999.
- b) 5.000 e 8.999.
- c) 9.000 e 9.999.
- d) 10.000 e 11.000.



Note que, nesse caso, a ordem dos nutrientes não importa ao montar a merenda. Logo, utilizaremos o conceito de combinação. Segue a fórmula:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Assim, devemos escolher:

1 proteína entre 4 possibilidades:

$$C_1^4 = \binom{4}{1} = \frac{4!}{(4-1)! \cdot 1!} = \frac{4!}{(3)!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4$$

1 carboidrato entre 3 possibilidades:

$$C_1^3 = \binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)! \cdot 1!} = \frac{3!}{(2)!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = 3$$

3 legumes entre 8 possibilidades:

$$C_3^8 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$$

2 verduras entre 6 possibilidades:

$$C_2^6 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6!}{(4)! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 3 \cdot 5 = 15$$

Então, usando o princípio fundamental da contagem, precisamos multiplicar todas essas etapas:

$$Total = C_1^4 \cdot C_1^3 \cdot C_3^8 \cdot C_2^6$$

Substituindo os valores na fórmula, encontramos:

$$Total = 4 \cdot 3 \cdot 56 \cdot 15$$

$$\therefore Total = 10080$$

Letra d.

032. (FGV/SSP-AM/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR/2015) Uma urna A contém cinco bolas numeradas com os números 1, 3, 5, 7 e 9. Uma urna B também contém cinco bolas, mas numeradas com os números 0, 2, 4, 6 e 8.

Retira-se, aleatoriamente, uma bola de cada urna e somam-se os números das duas bolas. O número de valores diferentes possíveis para essa soma é:

- a) 25
- b) 21
- c) 17
- d) 13
- e) 9



Agora, vamos ter que usar o PFC de uma maneira mais sutil.

Perceba que, se selecionarmos o número 1 na urna A, teremos 5 opções para a urna B. Vejamos:

$$1 + 0 = 1 \quad 1 + 2 = 3 \quad 1 + 4 = 5 \quad 1 + 6 = 7 \quad 1 + 8 = 9$$

Agora, quando selecionamos o número 3 na urna A, não temos mais 5 opções, pois várias delas conduzem a somas que já foram encontradas acima. Vejamos:

$$3 + 0 = 3 \quad 3 + 2 = 5 \quad 3 + 4 = 7 \quad 3 + 6 = 9 \quad 3 + 8 = 11$$

X X X X ok

O mesmo também quando selecionamos 5, 7 e 9 na urna A. Para cada um desses números, a única novidade será se somarmos a 8. Vejamos:

$$5 + 8 = 13 \quad 7 + 8 = 15 \quad 9 + 8 = 17$$

ok ok ok

Podemos contar todas as opções que já encontramos e chegamos a 9. Porém vamos montar uma tabela para utilizar em que você pode visualizar a utilização do PFC.

Precisamos selecionar uma bola da urna A e uma bola da urna B. Por isso, multiplicamos as opções nas urnas A e B.

	Urna A	Urna B	Total
	1 opção (1)	5 opções (0, 2, 4, 6, 8)	$1 \cdot 5 = 5$
OU	4 opções (3, 5, 7 e 9)	1 opção (8)	$4 \cdot 1 = 4$
			5 + 4 = 9

Letra e.

033. (FGV/CGE-MA/AUDITOR/2014) João lançou um dado três vezes seguidas e a soma dos resultados deu 15. O número de maneiras possíveis para a sequência dos três resultados é:

- a) 3
- b) 5
- c) 7
- d) 9
- e) 10



Como queremos que a soma dos três dados seja igual a 15, precisamos notar que os dois primeiros dados determinam o número que deve ser obtido pelo terceiro.

Exemplo, se tiramos 6 e 6 nos primeiros dados, necessariamente, teremos que o terceiro dado será igual a 3.

Além disso, em alguns casos, não é possível obter uma soma 15 quando obtemos números muito baixos nos primeiros dados. Por exemplo, se tiramos 1 e 1, não é possível obter soma 15 com o terceiro dado. O máximo da soma seria $1 + 1 + 6 = 8$.

Então, podemos resolver o problema de trás para frente. Dessa forma, primeiro decidiremos as somas possíveis para os dois primeiros dados.

Dados 1 e 2	Dado 3
< 8	0 opções
9 (1 opção)	6 (1 opção)
10 (1 opção)	5 (1 opção)
11 (1 opção)	4 (1 opção)
12 (1 opção)	3 (1 opção)
13 (1 opção)	2 (1 opção)
14 (1 opção)	1 (1 opção)
> 15	0 opções

Agora, precisamos calcular o número de formas que podemos obter as somas de 9 a 14. Para que a soma seja 9, perceba que o primeiro dado não pode ser menor que 3. São, portanto, quatro possibilidades.

$$3 + 6 = 9 \quad 4 + 5 = 9 \quad 5 + 4 = 9 \quad 6 + 3 = 9$$

Para que a soma seja 10, o primeiro dado não pode ser menor que 4. São três possibilidades.

$$4 + 6 = 10 \quad 5 + 5 = 10 \quad 6 + 4 = 10$$

Para que a soma seja 11, o primeiro dado não pode ser menor que 5. Restam, portanto, duas possibilidades.

$$5 + 6 = 11 \quad 6 + 5 = 11$$

Para que a soma seja 12, os dois primeiros dados devem ser iguais a 6. Portanto, só existe uma possibilidade. Além disso, não é possível que a soma dos dois primeiros dados seja maior que 12.

Sendo assim, temos a tabela:

Dados 1 e 2	Dado 3	Total
9 (4 opções)	6 (1 opção)	$4.1 = 4$
10 (3 opções)	5 (1 opção)	$3.1 = 3$
11 (2 opções)	4 (1 opção)	$2.1 = 2$
12 (1 opção)	3 (1 opção)	$1.1 = 1$
		$+ 3 + 2 + 1 = 10$

Letra e.

034. (CESPE/TRE-GO/TÉCNICO JUDICIÁRIO/2015) As prestações de contas das campanhas dos 3 candidatos a governador de determinado estado foram analisadas por 3 servidores do TRE desse estado. Considerando que um servidor pode analisar nenhuma, uma ou mais de uma prestação de contas e que, por coincidência, cada um dos 3 candidatos é parente de um dos 3 servidores, julgue o item que se segue.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuírem as prestações de contas entre os 3 servidores de modo que nenhum deles analise as contas de um parente é superior a 5.



As contas de cada candidato podem ser avaliadas por qualquer um dos dois servidores que não seja seu parente.

Como não há nenhum problema em um servidor analisar nenhuma ou duas contas, é só aplicar o Princípio Fundamental da Contagem.

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & \times & 2 & \times & 2 & = & 2.2.2=8 \\ \hline & & & & & & \text{Total} \end{array}$$

Certo.

035. (CESPE/MEC/2014) A análise de requerimentos de certificação de entidades educacionais, no âmbito do Ministério da Educação, será realizada por uma equipe formada por, no mínimo, um analista contábil, um analista educacional e um analista processual. Considerando essa situação hipotética, julgue os itens subsecutivos.

A partir de cinco analistas contábeis, sete analistas educacionais e seis analistas processuais, é possível formar mais de 300 equipes distintas com exatamente um analista de cada especialidade em cada equipe.



Aplicação direta do PFC. Temos 5 opções para o analista contábil, 7 opções para o analista educacional e 6 opções para o analista processual.

5	x	7	x	6	=5.7.6 = 210
Analista Contábil		Analista Educacional		Analista Processual	Total

Portanto, o número de opções é menor que 300.

Errado.

036. (FCC/TRF-1ª REGIÃO/TÉCNICO JUDICIÁRIO-ÁREA ADMINISTRATIVA/2007) Um técnico judiciário foi incumbido da montagem de um manual referente aos Princípios Fundamentais da Constituição Federal. Sabendo que, excluídas a capa e a contra-capas, a numeração das páginas foi feita a partir do número 1 e, ao concluí-la, constatou-se que foram usados 225 algarismos, o total de páginas que foram numeradas é

- a) 97
- b) 99
- c) 111
- d) 117
- e) 126



Questão bem interessante. Nas páginas de 1 a 9, foi usado apenas um algarismo. Portanto, um total de 9 algarismos até então.

Entre a página 10 e a 99, foram usados dois algarismos por página. Como são 90 páginas, foi necessário um total de 180 algarismos para numerá-las.

Até o momento, já foram utilizados 189 algarismos. Portanto, restam, ainda, $225 - 189 = 36$. A partir da página 100, vão ser necessários três algarismos por página. Portanto, os 36 algarismos que ainda restam serão suficientes para cobrir 12 páginas. Dessa forma, da página 100 à página 111 – cuidado para não pensar que é a página 112, ok?

Sendo assim, foram numeradas desde a página 1 até a página 111, perfazendo o total de 111 páginas.

Letra c.

037. (CESPE/SEFAZ-RS/AUDITOR FISCAL DA RECEITA ESTADUAL/2019) Os funcionários de uma repartição foram distribuídos em sete grupos de trabalhos, de modo que cada funcionário participa de exatamente dois grupos, e cada dois grupos têm exatamente um funcionário em comum.

Nessa situação, o número de funcionários da repartição é igual a

- a) 7.
- b) 14.
- c) 21.
- d) 28.
- e) 35.



Para garantir que, a cada dois grupos, haja exatamente um funcionário em comum, temos que os 7 grupos devem ser formados por 6 funcionários cada – um funcionário é em comum com cada um dos outros 6 grupos.

Como cada funcionário participa de dois grupos, precisamos dividir o número de funcionários por 2.

$$N = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Para fins de visualização, podemos construir os seguintes grupos. São 7 grupos, cada um com 6 funcionários. Note que todos os funcionários (A a U) pertencem, simultaneamente, a exatamente dois grupos e que, a cada dois grupos, há exatamente um funcionário em comum.

G1: ABCDEF

G2: AGHIJK

G3: BGLMNO

G4: CHLPQR

G5: DIMPST

G6: EJNIQS

G7: FKORTU

Contando as letras ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTU, são realmente 21 letras.

Letra c.

038. (INSTITUTO CONSULPLAN/FEPAM-RS/ADMINISTRADOR/2023) Em uma partida de petecas apenas dois jogadores adversários se enfrentarão. Um torneio será realizado nesta modalidade esportiva e contará com 50 jogadores. Foi estabelecido que cada partida será de um set e o competidor que for derrotado duas vezes será eliminado deste torneio, dando

a vez para um outro jogador. O número máximo de partidas que poderão ser disputadas para se chegar ao campeão será:

- a) 49
- b) 50
- c) 99
- d) 100
- e) 199



Separemos as partidas em vários rounds, para facilitar o entendimento.

Round 1: os 50 jogadores formarão **25 partidas**. Dessas partidas, teremos 25 vitoriosos e 25 derrotados.

Round 2: após isso, haverá mais **25 partidas**. Como precisamos achar o número máximo de partidas, depois desse round, os 25 vitoriosos foram, agora, derrotados. Até aqui, todos os 50 jogadores têm 1 derrota.

Round 3: após isso, haverá mais **25 partidas**, que resultarão em 25 jogadores derrotados duas vezes. Portanto, 25 jogadores foram eliminados.

Round 4: com 25 jogadores restantes, teremos, agora, **12 partidas**. Dessa forma, mais 12 jogadores perderão e serão eliminados. O 25º jogador terá **1 partida** com algum vitorioso e eliminaremos mais um dentre esses dois jogadores. Sobram 12.

Round 5: haverá **6 partidas**, com eliminação de mais 6 jogadores, e restando apenas 6.

Round 6: haverá **3 partidas**, com eliminação de mais 3 jogadores, e restando apenas 3.

Round 7: haverá **2 partidas**, com eliminação de mais 2 jogadores e restando apenas 1, isto é, o campeão.

Agora, precisamos somar todas as partidas.

$$Total = 25 + 25 + 25 + 12 + 1 + 6 + 3 + 2$$

$$\therefore Total = 99$$

Letra c.

039. (INÉDITA/2023) Em uma lanchonete, há 5 sabores diferentes de sanduíches, 6 sabores diferentes de sucos e 3 sabores de sobremesas. Um pedido é composto por, no máximo, um sanduíche, um suco e uma sobremesa, mas não necessariamente. Sendo assim, é possível que o cliente peça somente um suco ou somente um sanduíche, mas ele não pode pedir dois sanduíches no mesmo pedido. Determine quantos pedidos diferentes podem ser feitos nessa lanchonete.



Pode parecer uma questão boba, mas é um problema muito importante para a logística. Cada pedido diferente representa uma SKU (skilled unit) e, portanto, será monitorado pelo setor de logística de uma empresa.

De qualquer maneira, podemos dizer que há 6 opções diferentes de sanduíches: além dos 5 do cardápio, o cliente tem a opção de não pedir nenhum sanduíche; o mesmo é válido para os sabores diferentes de sucos, que são 7, pois o cliente pode não pedir nenhum. Assim, temos:

$$\frac{(5+1)}{\text{Sanduíches}} \times \frac{(6+1)}{\text{Sucos}} \times \frac{(3+1)}{\text{Sobremesas}} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 4}{168}$$

Há um total de 168 pedidos diferentes. Convém notar que um desses pedidos é um pedido vazio, pois não contém nenhum sanduíche, nenhum suco e nenhuma sobremesa. Como o problema não fez nenhuma restrição à existência de pedidos vazios, esse pedido deve ser considerado.

Gabarito: 168.

040. (CESPE/SEFAZ-RS/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO FAZENDÁRIO/2018) A tabela a seguir mostra os preços, em R\$ 100, de passagens aéreas para viagens com origem nas cidades A, B, C, D ou E e para viagens com destino a essas mesmas cidades.

		destino				
		A	B	C	D	E
origem	A	0	3	1	2	5
	B	2	0	2	1	4
	C	1	3	0	2	1
	D	2	5	4	0	3
	E	5	2	1	4	0

Por necessidade de serviço, um funcionário deverá visitar todas essas cidades uma única vez, sempre por via aérea, e deverá partir de alguma delas.

Considerando-se todas as possibilidades de partida, o menor valor a ser gasto com as passagens aéreas é igual a:

- a) R\$ 400.
- b) R\$ 500.
- c) R\$ 600.
- d) R\$ 800.
- e) R\$ 900.



Nessa questão, o aluno deve ser bem esperto.

Trata-se do famoso problema do cacheiro viajante, que é um dos problemas em aberto na Matemática. Não temos um algoritmo que seja capaz de resolvê-lo com facilidade. Porém esse problema, em particular, pode ser resolvido com algumas observações.

Observe que o funcionário deverá fazer quatro viagens, pois ele deve passar pelas cinco cidades, e não foi dito nada de que ele deveria retornar ao ponto de partida.

O preço mínimo das viagens é igual a R\$100. Como são necessárias pelo menos quatro viagens, o valor mínimo a ser desembolsado seria de R\$400.

Porém não podemos marcar a letra a) diretamente. Devemos encontrar pelo menos uma rota nesse valor.

Mas note que nenhuma rota com destino em B tem o custo de R\$100. O menor custo para chegar em B é igual a R\$200. Portanto, isso já aumenta o custo mínimo do percurso para R\$500.

E, agora, será que conseguimos encontrar um percurso com o custo igual a R\$500?

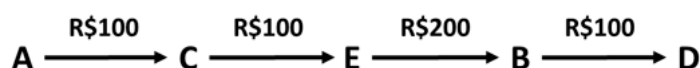
Note que, para isso, necessariamente, precisamos ter uma etapa do percurso como E – B, com custo de R\$200. Caso contrário, o custo aumentaria ainda mais.

Para chegar em E ao custo de R\$100, precisamos partir de C. Portanto, o final da viagem deve ser C – E – B.

Para chegar a C ao custo de R\$100, precisamos partir de E ou de A. Porém a partida de E é inviável, pois essa cidade já será visitada mais adiante. Logo, precisamos concluir com o percurso A – C – E – B.

Por fim, precisamos passar pela cidade D. Se incluíssemos D no início da viagem, o custo do trecho D – A seria de R\$200, logo, o trajeto total ficaria R\$600. Porém, se incluíssemos D ao final, teríamos o percurso B – D ao custo de R\$100.

Portanto, o percurso A – C – E – B – D teria o custo total de R\$500.



Letra b.

041. (FGV/RECEITA FEDERAL/AUDITOR-FISCAL/2023) O número de anagramas que podem ser formados com as letras da palavra DEMOCRACIA em que todas as vogais estejam juntas e todas as consoantes também estejam juntas é igual a

- a) 3600.
- b) 4800.
- c) 7200.
- d) 12300.
- e) 14400.



Para este problema, usaremos a permutação com repetição, conforme fórmula a seguir:

$$P_n^{(n_1, n_2, n_3, \dots)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots}$$

Diagram illustrating the formula components:

- Quantidade de cada elemento repetido** (indicated by a green arrow pointing to the subscripts $n_1, n_2, n_3, \dots$)
- Quantidade de elementos totais** (indicated by a red arrow pointing to n)
- Permutação com elementos repetidos** (indicated by a blue arrow pointing to the entire formula)

Inicialmente, observe um possível anagrama formado com a palavra DEMOCRACIA, com todas as vogais juntas e todas as consoantes também juntas:

D M C R C E O A I A

Vamos achar quantas possibilidades de rearranjo temos para as **consoantes**. Como a letra **C** é repetida, utilizando a fórmula acima, temos:

- $n_1 = 2$ (DMCRC tem 2 letras **C**).
- $n = 5$ consoantes.

Substituindo os valores na fórmula, encontramos:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!}$$

Resolvendo, temos:

$$P_5^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$$

$$P_5^2 = 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$P_5^2 = 60 \text{ possibilidades para as consoantes}$$

Agora, vamos achar quantas possibilidades de rearranjo temos para as **vogais**. Como a letra **A** é repetida, utilizando a fórmula da permutação com repetição, temos:

- $n_1 = 2$ (EOAIA tem 2 letras **A**).
- $n = 5$ vogais.

Substituindo os valores na fórmula, encontramos:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!}$$

Resolvendo, temos:

$$P_5^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$$

$$P_5^2 = 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$P_5^2 = 60 \text{ possibilidades para as vogais}$$

Perceba, também, que podemos inverter a ordem do grupo de vogais com o grupo das consoantes. Dessa maneira, temos o dobro de possibilidades.

Logo, o total de possíveis anagramas será de:

$$Total = 60 \cdot 60 \cdot 2$$

$$\therefore Total = 7200 \text{ anagramas}$$

Letra c.

042. (INSTITUTO CONSULPLAN/SEED-PR/ÁREA DE CONHECIMENTO: MATEMÁTICA/2022)
Suponha que as letras da palavra ÂNGULO precisam ser distribuídas nas seis lacunas a seguir:

O número de maneiras distintas que tais letras podem ser distribuídas de modo que todas as vogais fiquem em uma mesma coluna é:

- a) 18
- b) 36
- c) 72
- d) 144



Inicialmente, note que a palavra ÂNGULO possui 3 vogais e 3 consoantes.

Para facilitar a compreensão, faremos uma distribuição hipotética com as vogais na primeira coluna e as consoantes na segunda coluna:

A	N
U	G
O	L

Note que esse é um dos casos favoráveis.

Logo, podemos alterar a posição das vogais entre si (dentro da primeira coluna) e também podemos alternar a posição das consoantes entre si (dentro da segunda coluna).

Sabendo que a permutação de 3 elementos é igual a $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, temos que o número de casos possíveis em que as vogais estão dispostas na primeira fileira e as consoantes na segunda é de:

$$\text{Vogais Primeira Coluna} = 3! \cdot 3!$$

$$\text{Vogais Primeira Coluna} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\therefore \text{Vogais Primeira Coluna} = 36$$

No entanto sabemos, também, que as vogais poderiam estar na segunda fileira e as consoantes na primeira. Portanto, multiplicaremos o resultado por 2, para achar os casos totais em que as vogais fiquem em uma mesma coluna.

$$\therefore \text{Total} = 36 \cdot 2$$

$$\therefore \text{Total} = 72 \text{ possibilidades}$$

Letra c.

043. (FGV/SEAD-AP/PROFESSOR DE EDUCAÇÃO BÁSICA–MATEMÁTICA/2022) Arnaldo tem 3 livros de Química, 4 de Física e 2 de Matemática, todos diferentes entre si e deseja arrumá-los em uma prateleira de modo que os livros de Química fiquem juntos e os de Física também. O número de maneiras distintas de Arnaldo arrumar os seus livros na prateleira é igual a

- a) 288.
- b) 576.
- c) 1152.
- d) 3456.
- e) 6912.



Temos que os livros de Química e Física funcionarão como um “bloco” para a permutação, pois precisam ficar juntos.

Logo, os 3 livros de Química funcionarão como 1 só para os cálculos, e os 4 livros de Física funcionarão como 1 só para os cálculos.

Então, teremos 4 elementos para a permutação simples nas prateleiras: Química, Física, Matemática 1 e Matemática 2. Fazendo os cálculos:

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P_4 = 12 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\therefore P_4 = 24 \text{ possibilidades}$$

Além disso, os livros de Física e Química podem permutar entre si. Então, também precisamos considerar essas possibilidades.

Portanto, para os 3 livros de Química, a permutação será P_3 , e, para os 4 livros de Física, a permutação será P_4 . Dessa forma, o total de possibilidades será de:

$$Total = 24 \cdot P_3 \cdot P_4$$

$$Total = 24 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$Total = 24 \cdot (3 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2)$$

$$Total = 24 \cdot (6) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2)$$

$$Total = 24 \cdot 6 \cdot (24)$$

$$Total = 144 \cdot (24)$$

$$Total = 3456 \text{ possibilidades}$$

Letra d.

044. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR MAPB ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO MATEMÁTICA/2022)

As amigas Ana, Bruna, Carla e Denise vão a uma festa e cada uma tem um vestido. Como querem usar um vestido diferente, decidiram que cada uma irá usar o vestido de uma das outras. O número de maneiras distintas de fazerem isso é igual a

- a) 12.
- b) 15.
- c) 9.
- d) 18.
- e) 6.



Considere A para Ana, B para Bruna, C para Carla e D para Denise. Tomando como referência Ana, temos que esta possui 3 possibilidades de escolha: vestido B, C e D.

Veremos o que acontece ao fixar uma dessas escolhas.

Vamos supor que Ana escolheu o vestido B. Logo, Bruna, Carla e Denise têm que escolher entre os vestidos restantes: A, C e D. Temos, então, as seguintes possibilidades:

Possibilidades	Bruna	Carla	Denise
1	A	D	C
2	D	A	C
3	C	D	A

Perceba que, para qualquer escolha de Ana, suas amigas sempre terão três maneiras diferentes de escolher os seus vestidos. Isto é, se Ana escolher o vestido B, C ou D, também teremos 3 possibilidades cada. Logo:

- Se Ana escolheu o vestido B, haverá 3 possibilidades;
- Se Ana escolheu o vestido C, haverá 3 possibilidades;
- Se Ana escolheu o vestido D, haverá 3 possibilidades.

Então, o total de maneiras distintas para todas as quatro amigas usarem vestidos que não sejam os próprios será de:

$$Total = 3 + 3 + 3$$

$$\therefore Total = 9 \text{ possibilidades}$$

Letra c.

045. (FGV/TJ-PI/ANALISTA JUDICIÁRIO – OFICIAL DE JUSTIÇA/2015) Em um saco A há somente fichas vermelhas e em um saco B há somente fichas amarelas, sendo 7 fichas em cada saco. Retiram-se 3 fichas do saco A, que são então colocadas no saco B. Depois, retiram-se aleatoriamente 3 fichas do saco B, que são então colocadas no saco A. É correto concluir que ao final do procedimento descrito:

- a) há no máximo 4 fichas vermelhas no saco A;
- b) há exatamente 4 fichas vermelhas no saco
- c) há exatamente 4 fichas amarelas no saco
- d) o número de fichas amarelas no saco A é menor do que o número de fichas vermelhas no saco B;
- e) o número de fichas vermelhas no saco A é igual ao número de fichas amarelas no saco B.



O saco A, originalmente, tinha 7 fichas vermelhas – que vamos representar por 7V. O saco B tinha, originalmente, 7 fichas amarelas – que vamos representar por 7A.

Quando foram retiradas 3 fichas do saco A, ele passou a ter apenas 4V, enquanto o saco B passou a ter 7A + 3V.

Na segunda etapa, serão retiradas 3 fichas aleatórias do saco B, que podem ser amarelas ou vermelhas. Suponha que sejam x fichas vermelhas retiradas do saco B. Teremos, portanto, que serão retiradas (3-x) fichas amarelas. Sendo assim, pode-se escrever:

$$A: 4V + xV + (3-x)A = (4+x)V + (3-x)A$$

$$B: 3V - xV + 7A - (3-x)A = (3-x)V + (7-3+x)A = (3-x)V + (4+x)A$$

Sendo assim, o número de fichas vermelhas no saco B é igual ao número de fichas amarelas do saco A.

Letra e.

046. (FCC/TRT-4ª REGIÃO-RS/ANALISTA JUDICIÁRIO-TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO/2015)

Em uma caixa há 30 bolas, numeradas de 1 a 30, todas com numeração diferente. O menor número de bolas que devem ser retiradas ao acaso dessa caixa para se obter, com certeza, duas bolas com numeração ímpar e menor que 19 é igual a

- a) 24.
- b) 23.
- c) 21.
- d) 19.
- e) 22.



As bolas com numeração ímpar e menor que 19 são as que pertencem ao conjunto $A = \{1, 3, 5, \dots, 17\}$, compondo um total de 9 elementos.

Perceba que, como o enunciado falou apenas em “menor que 19”, não podemos incluir a bola com o número 19 no conjunto A.

Por outro lado, as bolas que não interessam ao problema são as demais, 21.

Agora, devemos imaginar o pior caso, em que demoramos o máximo possível para tirar as bolas do conjunto A. Nesse caso, tiraríamos as 21 bolas que não pertencem a esse conjunto. Então, as duas bolas seguintes seriam, necessariamente, do conjunto A.

Portanto, é necessário retirar o mínimo de 23 bolas para garantir que pelo menos duas delas pertencem ao conjunto A.

Letra b.

047. (FCC/TJ-PE/2012) A palavra GOTEIRA é formada por sete letras diferentes. Uma sequência dessas letras, em outra ordem, é TEIGORA. Podem ser escritas 5040 sequências diferentes com essas sete letras. São 24 as sequências que terminam com as letras GRT, nessa ordem, e começam com as quatro vogais. Dentre essas 24, a sequência AEIOGRT é a primeira delas, se forem listadas alfabeticamente. A sequência IOAEGRT ocuparia, nessa listagem alfabética, a posição de número:

- a) 11
- b) 13
- c) 17
- d) 22
- e) 23



Em um primeiro momento, devemos descobrir quantas sequências de letras desejadas vêm antes do alfabeto de IOAEGRT.

Vamos separar em dois casos:

– O primeiro caso contém as palavras que começam em A ou E. Nesse caso, elas, necessariamente, vêm antes de IOAEGRT.

Para a primeira posição, temos duas possibilidades (A ou E). Para a segunda posição, restam 3 possibilidades, pois precisamos excluir as letras GRT e também a letra que já foi escolhida para a primeira posição.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{2}{1} & \times & \frac{3}{2} & \times & \frac{2}{3} & \times & \frac{1}{4} & = 2.3.2 = 12 \\ & & & & & & & \text{Total} \end{array}$$

Além disso, a letra pode iniciar em I. Nesse caso, a segunda letra não pode ser O, pois a menor sequência já seria IOAEGRT. Sendo assim, a segunda letra deve ser, necessariamente, A ou E.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1} & \times & \frac{2}{2} & \times & \frac{2}{3} & \times & \frac{1}{4} & = 1.2.2.2 = 4 \\ & & & & & & & \text{Total} \end{array}$$

Sendo assim, existe um total de $12 + 4 = 16$ combinações que vêm antes de IOAEGRT no alfabeto. Portanto, IOAEGRT ocupa a posição de número 17.

Letra c.

048. (FGV/CODESP-SP/ADVOGADO/2010) HÁ seis contêineres diferentes que deverão ser empilhados, três mais pesados embaixo e três mais leves em cima. O número de maneiras de se fazer essa arrumação, mantendo os três mais pesados embaixo e os três mais leves em cima é:

- a) 18
- b) 6
- c) 9
- d) 36
- e) 72



Temos três posições tanto em cima como em baixo. Porém não podemos misturar os contêineres de cima com os de baixo, porque os mais pesados devem ficar em baixo, e os mais leves em cima.

Sendo assim, para os contêineres do andar de cima, temos 3 contêineres que devem ser organizados em 3 posições.

O mesmo se aplica aos

2	x	3	x	2	x	1	= 2.3.2
1		2		3		4	= 12
						Total	

Agora, devemos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem.

6	.	6	= 6.6 = 36
Superior		Inferior	Total

Letra d.

049. (CESPE/BANCO DO BRASIL/ESCRITURÁRIO/2008) A quantidade de permutações distintas que podem ser formadas com as 7 letras da palavra REPETIR, que começam e terminam com R, é igual a 60.



Nesse caso, a primeira e a última letra estão travadas, ou seja, devem ser a letra R. Quanto às demais posições, devemos embaralhar as demais 5 letras, das quais 2 estão repetidas. Trata-se, portanto, de uma permutação com repetição

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{P_5^2}{EPETI} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{Total}$$

$$N = P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Certo.

050. (IBFC/SEC-BA/PROFESSOR DA EDUCAÇÃO BÁSICA-MATEMÁTICA/2023) Com os algarismos do conjunto {0, 2, 3, 4, 5} podemos formar números de três algarismos distintos. A quantidade de número formados nestas condições é:

- a) 120
- b) 20
- c) 32
- d) 24
- e) 48



Perceba que o primeiro algarismo dentre os três possíveis não pode ser zero, pois queremos números de três algarismos. Já o segundo e o terceiro algarismos podem ter o 0 como opção. Temos, então:

Para o 1º algarismo:

Temos 4 opções (2, 3, 4, 5), pois o zero está excluído.

Para o 2º algarismo:

Temos 4 opções novamente, pois, agora, podemos incluir o 0 nas opções e devemos retirar o primeiro número que foi escolhido - e não poderá ser repetido.

Para o 3º algarismo:

Temos 3 opções agora, pois precisamos escolher um dos algarismos restantes, excluindo aqueles que já foram escolhidos para o primeiro e segundo algarismo.

Portanto, o número total de números de três algarismos distintos será de:

$$Total = 4 \cdot 4 \cdot 3$$

$$Total = 16 \cdot 3$$

$$\therefore Total = 48 \text{ possibilidades}$$

Letra e.

051. (FGV/MRE/OFICIAL DE CHANCELARIA/2016) André, Beatriz e Carlos são adultos, Laura e Júlio são crianças e todos vão viajar em um automóvel com 5 lugares, sendo 2 na frente e 3 atrás. Dos adultos, somente Carlos não sabe dirigir. As crianças viajarão atrás, mas Júlio faz questão de ficar em uma janela. O número de maneiras diferentes pelas quais essas pessoas podem ocupar os cinco lugares do automóvel é:

- a) 12
- b) 16
- c) 18
- d) 20
- e) 24



Uma questão bem inteligente. Creio que a melhor maneira de fazer é em dois passos:

- 1) Calculamos de quantas maneiras é possível organizar os ocupantes dos bancos da frente;
 - 2) Calculamos de quantas maneiras é possível organizar os ocupantes dos bancos de trás;
- Para os bancos da frente, temos que a cadeira do motorista só pode ser ocupada por 2 pessoas (Beatriz e André). Já a cadeira do carona pode ser ocupada por outras 2 pessoas (Carlos e a pessoas que não foram escolhidas para motorista).

Portanto, para os bancos da frente, temos:

$$\frac{2}{\text{Motorista}} \cdot \frac{2}{\text{Co-Piloto}} = 2 \cdot 2 = 4$$

No banco de trás, vamos escolher primeiro a posição de Júlio. Ele só pode ficar em uma das janelas, portanto, só temos duas opções para alocá-lo.

Os demais 2 passageiros (Laura e o adulto que sobrou) podem ocupar qualquer posição, portanto, trata-se de uma permutação de dois elementos. Podemos escrever assim:

$$\frac{2}{\text{Júlio}} \cdot \frac{2}{\text{Laura}} \cdot \frac{1}{\text{Adulto}} = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

Perceba que calculamos de formas diferentes o número de maneiras de ocupar os bancos da frente e os bancos de trás, porque escolhemos o modo mais fácil em ambos os casos. Por fim, para calcular o número de formas de organizar todos os passageiros, basta aplicar o Princípio Fundamental da Contagem.

$$\begin{array}{ccc} \underline{4} & \cdot & \underline{4} & = & \underline{4 \cdot 4 = 16} \\ \text{Frente} & & \text{Trás} & & \text{Total} \end{array}$$

Letra b.

052. (CESPE/ANVISA/TÉCNICO ADMINISTRATIVO/2016) Situação hipotética: A ANVISA, com objetivo de realizar a regulação de um novo medicamento, efetua as análises laboratoriais necessárias. Essas análises são assistidas por um grupo de 4 dos seus 8 técnicos farmacêuticos. Desses técnicos, 3 possuem cargo de chefia de equipe e por isso não trabalham juntos. Assertiva: Nessa situação, considerando que em cada uma das equipes participa sempre apenas um dos três técnicos farmacêuticos chefes, então a quantidade de equipes distintas com 4 técnicos farmacêuticos que poderão ser formadas é inferior a 25.



Na equipe, tem-se 5 técnicos comuns e 3 chefes. Precisamos escolher 1 chefe e 3 comuns para a equipe de 4 técnicos. Então, temos o seguinte:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\binom{3}{1}} & \cdot & \underline{\binom{5}{3}} & & \\ \text{Chefe} & & \text{Comuns} & & \text{Total} \end{array}$$

Agora, basta calcular os binomiais.

$$\binom{3}{1} = 3$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Agora, basta calcular:

$$\begin{array}{ccc} \underline{3} & \cdot & \underline{10} & = & \underline{3 \cdot 10 = 30 > 25} \\ \text{Chefe} & & \text{Comuns} & & \text{Total} \end{array}$$

Perceba que sempre utilizamos o PFC.

Errado.

053. (CESPE/MPOG/ANALISTA EM TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO/2015) Determinado órgão público é composto por uma diretoria geral e quatro secretarias; cada secretaria é formada

por três diretorias; cada diretoria tem quatro coordenações; cada coordenação é constituída por cinco divisões, com um chefe e sete funcionários subalternos em cada divisão.

A respeito desse órgão público, julgue o item seguinte, sabendo que cada executivo e cada funcionário subalterno só pode ocupar um cargo nesse órgão.

Se, entre onze servidores previamente selecionados, forem escolhidos: sete para compor determinada divisão, um para chefiar essa divisão, um para a chefia da coordenação correspondente, um para a diretoria e um para a secretaria, haverá menos de 8.000 maneiras distintas de se fazer essas escolhas.



Vamos fazer o problema por partes. Inicialmente, escolheremos os quatro chefes de funções específicas.

Para isso, precisamos escolher 4 em 11, importando a ordem, porque cada um tem uma função diferente. Trata-se, portanto, de um arranjo.

11	.	10	.	9	.	8	=11.10.9.8
Chefe da Divisão		Chefe da Coordenação		Diretoria		Secretaria	Total

$$A_{11}^4 = \frac{11!}{7!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920$$

Como já escolhemos os quatro chefes, sobraram 7 funcionários. Todos eles devem compor a divisão. Portanto, o número de formas é mesmo 7920, que é inferior a 8000.

Certo.

054. (CESPE/FUB/2015) Com as cinquenta e duas cartas de um baralho, é possível formar mais de 2.500.000 jogos distintos de 5 cartas.



Formar um jogo de 5 cartas é a mesma coisa que escolher 5 cartas dentre as 52 do baralho. Nesse caso, a ordem não importa. Por isso, utilizaremos uma combinação.

$$C_{52}^5 = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2598960 > 2500000$$

Certo.

055. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL/2014) Um batalhão é composto por 20 policiais: 12 do sexo

- masculino e 8 do sexo feminino. A região atendida pelo batalhão é
- composta por 10 quadras e, em cada dia da semana, uma dupla de
- policiais polícia cada uma das quadras.

Com referência a essa situação, julgue o item subsequente.

Se a escala dos policiais for feita de modo a diversificar as duplas que policiam as quadras, então, se determinada dupla policiar a quadra X em determinado dia, essa mesma dupla voltará a policiar a quadra X somente mais de seis meses após aquele dia.



Para isso, precisamos saber o número de duplas que podem ser formadas. Como não há nenhuma restrição a respeito do sexo dos policiais nas duplas, vamos considerar que precisamos escolher 2 policiais dentre os 20 no total.

$$C_{20,2} = \binom{20}{2} = \frac{20!}{2!18!} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$$

Dessa maneira, se uma dupla for formada hoje, ela só precisará se repetir daqui a 190 dias, ou seja, mais de 6 meses.

Certo.

056. (CESPE/PGE-PE/ANALISTA ADMINISTRATIVO DE PROCURADORIA – CALCULISTA/2019)

Entre os 12 processos administrativos de determinado setor público, 5 se referem a adicional de periculosidade. Para agilidade na discussão e no julgamento, esses 12 processos serão agrupados em pares. Nesse caso, a quantidade de pares de processos distintos que podem ser formados de modo que pelo menos um dos processos se refira a adicional de periculosidade é igual a 35.



Podemos utilizar a ideia de:

Calcular todas as formas possíveis de escolher um par de processos distintos:

$$Total\ de\ Possibilidades = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$$

Excluir as situações em que o par de processos não inclui nenhum processo que se refere a adicional de periculosidade. Nesse caso, temos que escolher 2 processos em um total de 7.

$$não\ interessam = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

Dessa forma, o total de processos que incluem pelo menos um processo referente à adicional de periculosidade é:

$$N = 66 - 21 = 45$$

Errado.

057. (CESPE/TC-DF/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA/2014) Considerando que, em um planejamento de ações de auditoria, a direção de um órgão de controle tenha mapeado a existência de 30 programas de governo passíveis de análise, e sabendo que esse órgão dispõe de 15 servidores para a montagem das equipes de análise e que cada equipe deverá ser composta por um coordenador, um relator e um técnico, julgue os próximos itens. A quantidade de maneiras distintas de serem escolhidos 3 dos referidos servidores para a montagem de uma equipe de análise é superior a 2.500.



Como os três servidores possuem funções diferentes, a ordem de escolha importa. Portanto, devemos fazer um arranjo de 3 servidores em um total de 15.

$$A_{15}^3 = \frac{15!}{12!} = 15.14.13 = 2730 > 2500$$

Certo.

058. (CESPE/TC-DF/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA/2014) Considerando que, em um planejamento de ações de auditoria, a direção de um órgão de controle tenha mapeado a existência de 30 programas de governo passíveis de análise, e sabendo que esse órgão dispõe de 15 servidores para a montagem das equipes de análise e que cada equipe deverá ser composta por um coordenador, um relator e um técnico, julgue os próximos itens. A quantidade de maneiras distintas de se escolherem 3 desses programas para serem acompanhados pelo órgão é inferior a 4.000.



Quando escolhermos 3 programas para serem analisados, a ordem não importa. Portanto, devemos fazer uma combinação de 30 programas 3 a 3.

$$C_{30}^3 = \binom{30}{3} = \frac{30.29.28}{3.2.1} = 4060 > 4000$$

Errado.

059. (CESPE/SAEB-BA/2011) O número total de partidas em um campeonato de pingue-pongue com 20 participantes em que cada competidor jogue uma única vez com cada um dos demais é igual a:

- a) 400
- b) 380
- c) 200
- d) 190



Uma partida é formada por dois competidores, sem importar a ordem. Em outras palavras, a partida A x B é igual à partida B x A.

Por isso, devemos usar o conceito de combinação.

$$C_{20}^2 = \binom{20}{2} = \frac{20!}{18!2!} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$$

Letra d.

060. (CESPE/TJ-SE/TÉCNICO JUDICIÁRIO/2014) Um grupo de 15 turistas que planeja passear pelo rio São Francisco, no Canyon do Xingó, em Sergipe, utilizará, para o passeio, três barcos: um amarelo, um vermelho e um azul. Cada barco tem capacidade máxima para 8 ocupantes e nenhum deles deixará o porto com menos de 3 ocupantes.

Com base nessa situação hipotética, julgue os itens seguintes.

A quantidade de maneiras distintas de escolher 8 turistas para ocupar o barco azul e 7 para ocupar o barco amarelo é inferior a $8^2 \times 7^2$.



Precisamos escolher 8 turistas dentre os 15 para ocupar o barco azul. Devemos usar uma combinação, porque não importa a ordem em que eles entram no barco. Os demais 7 estarão automaticamente escolhidos para o barco amarelo.

$$C_{15,8} = \binom{15}{8} = \frac{15!}{8!7!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6435 > 3136$$

O número fornecido pelo enunciado $8^2 \cdot 7^2 = 3136$, portanto, vimos que a combinação citada é, na verdade, superior ao proposto pelo enunciado.

Errado.

061. (CESPE/TJ-SE/TÉCNICO JUDICIÁRIO/2014) Um grupo de 15 turistas que planeja passear pelo rio São Francisco, no Canyon do Xingó, em Sergipe, utilizará, para o passeio, três barcos: um amarelo, um vermelho e um azul. Cada barco tem capacidade máxima para 8 ocupantes e nenhum deles deixará o porto com menos de 3 ocupantes.

Com base nessa situação hipotética, julgue os itens seguintes.

A quantidade de maneiras distintas de distribuir os 15 turistas pelos 3 barcos, de forma que cada barco seja ocupado por exatamente 5 turistas, é superior a $2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^2$.



Nesse caso, precisamos escolher o primeiro grupo de 5 turistas para o primeiro barco, no total de 15. Mais uma vez, usamos o conceito de combinação, porque a ordem não importa.

$$\frac{\binom{15}{5}}{\text{1.º Barco}} \cdot \frac{\quad}{\text{Total}}$$

Até o momento, sobraram 10 turistas. Devemos escolher 5 deles para o 2º barco.

$$\frac{\binom{15}{5}}{\text{1.º Barco}} \cdot \frac{\binom{10}{5}}{\text{2.º Barco}} \cdot \frac{\quad}{\text{Total}}$$

Os cinco turistas que sobraram estão automaticamente escolhidos para o terceiro barco. Porém, para fins didáticos, vamos calcular – escolher 5 turistas num total de 5.

$$\frac{\binom{15}{5}}{\text{1.º Barco}} \cdot \frac{\binom{10}{5}}{\text{2.º Barco}} \cdot \frac{\binom{5}{5}}{\text{3.º Barco}} \cdot \frac{\quad}{\text{Total}}$$

Agora, só há mais um detalhe que precisamos calcular. Note que, até o momento, falamos em 1º barco, 2º barco e 3º barco. Porém os três barcos são diferentes.

Devemos, portanto, considerar o número de formas de organizar os três barcos nas três posições, ou seja, trata-se de uma permutação de 3 elementos.

$$\frac{\binom{15}{5}}{\text{1.º Barco}} \cdot \frac{\binom{10}{5}}{\text{2.º Barco}} \cdot \frac{\binom{5}{5}}{\text{3.º Barco}} \cdot \frac{3!}{\text{Permutações dos Barcos}} \cdot \frac{\quad}{\text{Total}}$$

Agora, basta fazer o produto.

$$N = \binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5} 3! = \frac{15!}{5! 10!} \frac{10!}{5! 5!} \frac{5!}{5! 0!} =$$

$$N = \frac{15.14.13.12.11}{5.4.3.2.1} \frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1} \cdot 1.3.2.1$$

$$N = 3003.252.6 > 3003.6.11^2 > 42^2 \cdot 6.11^2 = 6.2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$$

Certo.

062. (CESPE/MEC/2014) A análise de requerimentos de certificação de entidades educacionais, no âmbito do Ministério da Educação, será realizada por uma equipe formada por, no mínimo, um analista contábil, um analista educacional e um analista processual. Considerando essa situação hipotética, julgue os itens subsecutivos.

A partir de cinco analistas contábeis, sete analistas educacionais e seis analistas processuais, a quantidade de maneiras distintas de se formar equipes com exatamente três analistas de cada especialidade em cada equipe é superior a 5.000.



Precisamos escolher 3 analistas contábeis dentre 5, depois 3 analistas educacionais dentre 7 e, por fim, 3 analistas processuais dentre 6. Dentro de cada escolha, não há funções diferentes, portanto, não existe preferência de ordem.

Como não importa a ordem, devemos usar o conceito de combinação.

$\binom{5}{3}$	x	$\binom{7}{3}$	x	$\binom{6}{3}$	$\binom{5}{3} \binom{7}{3} \binom{6}{3}$
Analista Contábil		Analista Educacional		Analista Processual	Total

Temos, portanto, que o número de possibilidades é:

$$N = \binom{5}{3} \binom{7}{3} \binom{6}{3} = \frac{5!}{3! 2!} \frac{7!}{3! 4!} \frac{6!}{3! 3!} = \frac{5.4}{2.1} \frac{7.6.5}{3.2.1} \frac{6.5.4}{3.2.1}$$

$$N = 10.35.20 = 7000 > 5000$$

Certo.

063. (CESPE/BANCO DO BRASIL/ESCRITURÁRIO/2008) Caso as senhas de acesso dos clientes aos caixas eletrônicos de certa instituição bancária contenham 3 letras das 26 do alfabeto,

admitindo-se repetição, nesse caso, a quantidade dessas senhas que têm letras repetidas é superior a 2×10^3 .



A melhor maneira de fazer essa questão é considerar o total de senhas possíveis e retirar aquelas que têm as letras todas diferentes.

Para o total de senhas possíveis, devemos considerar que qualquer uma das letras pode ser empregada em qualquer posição – inclusive várias vezes.

$$\frac{26}{\text{Total}} \times \frac{26}{\text{Total}} \times \frac{26}{\text{Total}} = 26^3$$

Agora, vamos calcular a quantidade de senhas que possuem as letras todas diferentes. Nesse caso, devemos escolher 3 letras dentre as 26 – a ordem importa, pois senhas com ordens diferentes são diferentes. Por exemplo, a senha ABC é diferente da senha CBA. Para isso, usamos o conceito de arranjo.

$$\frac{26}{\text{Proibidas}} \times \frac{25}{\text{Proibidas}} \times \frac{24}{\text{Proibidas}} = A_{26}^3 = 26 \cdot 25 \cdot 24$$

Para saber o número de senhas que nos interessam, ou seja, aquelas que possuem pelo menos uma letra repetida, basta fazer a diferença.

$$N = 26^3 - 26 \cdot 25 \cdot 24 = 26 \cdot (26^2 - 25 \cdot 24)$$

$$N = 26 \cdot (676 - 600) = 26 \cdot 76 = 1976 < 2000$$

Errado.

064. (FCC/SEGEP-MA/AUDITOR FISCAL DA RECEITA ESTADUAL/2016) Jair tem 8 primos, dos quais irá convidar 5 para um jantar em sua casa. Ocorre que 2 dos 8 primos só podem ir ao jantar se forem juntos. O total de escolhas diferentes dos 5 convidados que Jair pode fazer para o jantar é igual a

- a) 40.
- b) 56.
- c) 30.
- d) 26.
- e) 36.



Jair tem duas opções: ele pode chamar os dois primos problemáticos OU não chamar nenhum. É importante destacar o conectivo **OU**, porque ele indica que faremos uma soma mais adiante.

Caso ele resolva convidar os dois primos, ele precisará escolher, dentre os outros 6, mais 3 convidados. Sendo assim, o número de formas de escolher é:

$$n_1 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

Por outro lado, caso ele não convide nenhum dos dois primos, ele precisará escolher 5 convidados dentre os demais 6 primos.

$$n_2 = \binom{6}{5} = \frac{6!}{5!1!} = \frac{6 \cdot 5!}{5!1!} = 6$$

Sendo assim, o total de possibilidades para Jair é:

$$N = n_1 + n_2 = 20 + 6 = 26$$

Letra d.

065. (FCC/DPE-SP/ANALISTA DE SISTEMAS/2015) Para formar uma senha de quatro letras é permitido o uso de uma letra A, uma letra B, duas letras C e três letras D. Dentre todas as senhas possíveis nesse sistema, o número daquelas que tem exatamente três letras diferentes supera o número das demais em

- a) 28.
- b) 24.
- c) 42.
- d) 36.
- e) 30.



O sistema em questão é formado pelas letras ABCCDDD. São, portanto, 7 letras, sendo que existe repetição de 2 letras C e 3 letras D.

O total de senhas possíveis poderia ser calculado por um arranjo com repetição, mas nós não abordamos esse assunto no curso. Portanto, tentaremos outra forma.

Vejamos todas as possibilidades para escolher as letras e anotaremos suas permutações.

As senhas podem ter todas as quatro letras diferentes, pode haver uma repetição de duas letras xyCC ou xyDD, pode haver duas repetições CCDD ou, ainda, a letra D pode se repetir três vezes (xDDD).

Contemos as senhas em que todas as letras são diferentes.

ABCD: $4! = 24$

$$n_1 = 4! = 24$$

Agora, testemos as senhas que possuem repetição de duas letras, portanto, são dois C ou dois D. Para isso, precisamos escolher uma das letras C ou D para se repetir duas vezes. Das 3 letras restantes, precisamos escolher 2 para completar o código (xyCC ou xyDD). Por fim, precisamos contar as permutações.

$\binom{2}{1} = 2$	$\times$	$\binom{3}{2} = 3$	$\times$	$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$
CC ou DD		Escolher duas letras das 3 restantes para serem as letras não repetidas.		Permutações entre as 4 letras da palavra, com repetição de duas.

Observe, ainda, que é exatamente esse o caso que nos interessa pelo enunciado, pois todas essas palavras possuem exatamente três letras diferentes.

$$n_2 = 2 \cdot 3 \cdot 12 = 72$$

Ainda temos dois casos a analisar. No caso CCDD, temos que contar apenas as permutações.

$$n_3 = P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

Por fim, temos o caso xDDD. Para isso, precisamos escolher a segunda letra da senha e contar as permutações possíveis.

3	$\times$	$P_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$
Escolher A, B ou C para completar a senha		Permutações entre as 4 letras da palavra, com repetição de três.

Dessa maneira, o total de possibilidades é:

$$n_4 = 3 \cdot 4 = 12$$

Sendo assim, as demais senhas, ou seja, excluindo as senhas que apresentam exatamente três letras diferentes (n_2), são:

$$n_{\text{demais}} = n_1 + n_3 + n_4 = 24 + 6 + 12 = 42$$

Portanto, a diferença pedida no enunciado é:

$$n_2 - n_{\text{demais}} = 72 - 42 = 30$$

Letra e.

066. (FCC/AL-AP/ANALISTA LEGISLATIVO-ADMINISTRADOR/2020) Há 51 pessoas em uma fila. Algumas pessoas dessa fila serão sorteadas. O menor número de pessoas que devem ser sorteadas para garantir que dentre elas haja pelo menos duas que são vizinhas na fila é:

- a) 25
- b) 27
- c) 24
- d) 26
- e) 28



A situação em que temos o maior número possível de pessoas que estão presentes na fila, mas que não encontramos duas pessoas vizinhas, é:

1 – 3 – 5 – ... – 45 – 47 – 49 – 51

Vamos calcular o número de pessoas nessa fila utilizando a fórmula da progressão aritmética.

$$51 = 1 + 2 \cdot (n - 1)$$

$$51 - 1 = 2 \cdot (n - 1)$$

$$50 = 2 \cdot (n - 1)$$

$$\therefore n - 1 = \frac{50}{2} = 25$$

$$\therefore n = 25 + 1 = 26$$

Dessa forma, o maior conjunto de pessoas na fila que não sejam vizinhas é igual a 26. Logo, se forem sorteadas 27 pessoas, seguramente, haverá duas pessoas vizinhas.

Letra b.

067. (FCC/BANRISUL/ESCRITURÁRIO/2019) Ana e Beatriz são as únicas mulheres que fazem parte de um grupo de 7 pessoas. O número de comissões de 3 pessoas que poderão ser formadas com essas 7 pessoas, de maneira que Ana e Beatriz não estejam juntas em qualquer comissão formada, é igual a:

- a) 20.
- b) 15.
- c) 30.
- d) 18.
- e) 25.



Questão bem interessante. Vamos calcular o total de comissões possíveis que poderiam ser formadas com as 7 pessoas. Para isso, devemos escolher 3 elementos em 7, isto é, fazemos uma combinação de 7 elementos 3 a 3.

$$N = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!3.2.1} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 7.5 = 35$$

Agora, vamos excluir todas as comissões em que Ana e Beatriz estejam juntas. Para isso, precisamos escolher uma pessoa para completa a comissão.

1	.	1	.	5	=	5
Ana		Beatriz		3ª Mulher		Total de Possibilidades

Dessa forma, devem ser excluídas 5 comissões possíveis, em que Ana e Beatriz simultaneamente estejam presentes.

$$N = 35 - 5 = 30$$

Letra c.

068. (FCC/PREFEITURA DE RECIFE-PE/ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA/2019) Uma determinada secretaria municipal conta com dois assessores (A1 e A2) e cinco supervisores (S1, S2, S3, S4 e S5). Deseja-se formar uma comissão formada por quatro membros, pelo menos um dos quais deve ser um assessor e os demais, supervisores. Ainda, se A1 for membro da comissão, S1 não deve ser. Nessas condições, podem ser formadas:

- a) 15 comissões diferentes.
- b) 30 comissões diferentes.
- c) 20 comissões diferentes.

- d) 44 comissões diferentes.
e) 60 comissões diferentes.



Podemos partir do global: o total de comissões que poderiam ser formadas por 4 membros dentro do total de 7 pessoas, que corresponde à combinação de 7 elementos 4 a 4.

$$N = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!.3.2.1} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 7.5 = 35$$

Devemos excluir as comissões em que:

I – Não há nenhum assessor

Nesse caso, são as comissões formadas apenas pelos 5 assessores. Dessa forma, devemos escolher 4 membros dentre os 5 assessores, ou seja, trata-se de uma combinação de 5 elementos 4 a 4:

$$n_1 = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!1!} = \frac{5.4!}{4!1} = 5$$

II – O assessor A1 está presentes com o supervisor S1

Para montar essas comissões, devemos escolher os demais 2 membros dentre o total de 5 membros:

$$n_2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!2.1} = \frac{5.4}{2.1} = 10$$

Dessa forma, o total de comissões possíveis pode ser obtido descontando-se as comissões proibidas do total de comissão.

$$N = 35 - 5 - 10 = 20 \text{ comissões}$$

Letra c.

069. (FGV/BANESTES/ANALISTA DE COMUNICAÇÃO/2023) Em uma empresa de projetos habitacionais, a equipe é formada por 6 engenheiros, 5 arquitetos e 4 paisagistas.

A fim de elaborar um novo projeto, serão escolhidos 4 desses profissionais, de modo que haja pelo menos um de cada habilitação profissional.

A quantidade de diferentes quartetos que podem assumir esse novo projeto é igual a:

- a) 300.
b) 420.
c) 480.

d) 540.

e) 720.



Inicialmente, sabemos que é necessário ter 1 engenheiro, 1 arquiteto e 1 paisagista em cada equipe. O quarto integrante pode ser outro engenheiro, outro arquiteto ou outro paisagista. Separemos em 3 casos:

Primeiro caso: 2 engenheiros, 1 arquiteto, 1 paisagista

Nesse caso, teremos que escolher 2 entre os 6 engenheiros, 1 entre os 5 arquitetos e 1 entre os 4 paisagistas.

Note que a ordem não importa nesta situação, logo, usaremos a Fórmula de Combinação. Segue a fórmula:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Então, para o 1º caso, temos:

$$\text{Caso 1} = C_2^6 \cdot C_1^5 \cdot C_1^4$$

Lembre-se que qualquer combinação em que se escolhe apenas um terá como resposta o total de escolhas possíveis. Assim,

$$C_1^6 = 6, C_1^5 = 5 \text{ e } C_1^4 = 4.$$

$$\text{Caso 1} = C_2^6 \cdot C_1^5 \cdot C_1^4$$

Substituindo os valores, temos:

$$\text{Caso 1} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot (5) \cdot (4)$$

Simplificando:

$$Caso\ 1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} \cdot 20$$

$$Caso\ 1 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 20$$

$$Caso\ 1 = \frac{30}{2} \cdot 20$$

$$Caso\ 1 = 15 \cdot 20$$

$$\therefore Caso\ 1 = 300\ maneiras$$

Segundo caso: 1 engenheiro, 2 arquitetos, 1 paisagista

Nesse caso, teremos que escolher 1 entre os 6 engenheiros, 2 entre os 5 arquitetos e 1 entre os 4 paisagistas.

Então, para o 2º caso, temos:

$$Caso\ 2 = C_1^6 \cdot C_2^5 \cdot C_1^4$$

Substituindo os valores:

$$Caso\ 2 = (6) \cdot \left(\frac{5!}{3! \cdot 2!} \right) \cdot (4)$$

Simplificando:

$$Caso\ 2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} \cdot 24$$

$$Caso\ 2 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 24$$

$$Caso\ 2 = 5 \cdot 2 \cdot 24$$

$$Caso\ 2 = 10 \cdot 24$$

$$\therefore Caso\ 2 = 240\ maneiras$$

Terceiro caso: 1 engenheiro, 1 arquitetos, 2 paisagistas

Nesse caso, teremos que escolher 1 entre os 6 engenheiros, 1 entre os 5 arquitetos e 2 entre os 4 paisagistas.

Então, para o 3º caso, temos:

$$\text{Caso 3} = C_1^6 \cdot C_1^5 \cdot C_2^4$$

Substituindo os valores:

$$\text{Caso 3} = (6) \cdot (5) \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

Resolvendo:

$$\text{Caso 3} = 30 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!}$$

$$\text{Caso 3} = 30 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$\text{Caso 3} = 30 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\text{Caso 3} = 60 \cdot 3$$

$$\therefore \text{Caso 3} = 180 \text{ maneiras}$$

Por fim, somando os 3 casos, temos:

$$\text{Total} = 300 + 240 + 180$$

$$\therefore \text{Total} = 720 \text{ maneiras possíveis}$$

Letra e.

070. (FGV/RECEITA FEDERAL/ANALISTA TRIBUTÁRIO/2023) A quantidade de anagramas da palavra SAUDADE nos quais todas as vogais estejam juntas é igual a

- a) 98.
- b) 144.
- c) 186.
- d) 204.
- e) 288.



A palavra SAUDADE tem 7 letras, das quais 3 são consoantes (S, D, D) e 4 são vogais (A, U, A, E).

Como as vogais AUAE devem ficar juntas, podemos considerar o conjunto AUAE como uma única letra. Dessa forma, temos os seguintes elementos para permutar: AUAE, S, D, D. Observe que será uma permutação com repetição. Segue a fórmula:

$$P_n^{(n_1, n_2, n_3, \dots)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots}$$

Inicialmente, vamos achar quantas possibilidades de rearranjo temos para o conjunto das vogais "AUAE". Como a letra **A** é repetida, utilizando a fórmula acima, temos:

$n_1 = 2$ (AUAE tem 2 letras A);

$n = 4$ (total de elementos);

Substituindo:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!}$$

Resolvendo, temos:

$$P_4^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$$

$$P_4^2 = 4 \cdot 3$$

$$P_4^2 = 12$$

Isto é, há 12 possibilidades de permutação para formar o bloco das vogais.

Agora, vamos achar quantas possibilidades de rearranjo temos para os elementos "AUAE, S, D, D". Como a letra **D** é repetida, utilizamos a fórmula de permutação com repetição. As variáveis serão:

$n_1 = 2$ (AUAE, S, D, D tem 2 letras D);

$n = 4$ (total de elementos).

Assim:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!}$$

Resolvendo, temos:

$$P_4^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$$

$$P_4^2 = 4 \cdot 3$$

$$P_4^2 = 12 \text{ possibilidades}$$

Por fim, temos que o total de anagramas possíveis será:

$$Total = 12 \cdot 12$$

$$\therefore Total = 144 \text{ anagramas}$$

Letra b.

071. (FCC/SEGEP-MA/ANALISTA EXECUTIVO-PROGRAMADOR DE SISTEMAS/2018) No setor administrativo de uma empresa, há quatro tipos de cargos: estagiários, técnicos, gerentes e diretores. Alguns funcionários desse setor comporão um grupo que será transferido para o setor financeiro da empresa. Composto-se o grupo com funcionários escolhidos ao acaso, o número mínimo de funcionários que deverá compor o grupo para que se tenha certeza de que nele haverá quatro funcionários de um mesmo cargo é igual a:

- a) 17.
- b) 15.
- c) 13.
- d) 16.
- e) 14.



Considere a seguinte legenda:

Estagiário = E

Técnico = T

Gerente = G

Diretor = D

Vamos espalhar o máximo possível essas pessoas, para que tenhamos o pior caso possível, em que tenhamos o maior número possível de funcionários sem que tenhamos 4 funcionários, como mostrado a seguir:

E | T | G | D

E | T | G | D

E | T | G | D

Portanto, conseguimos o máximo de 12 funcionários. Dessa forma, o próximo funcionário, necessariamente, terá o mesmo cargo de um anterior, formando um grupo de 4 funcionários de um mesmo cargo. Vejamos um exemplo.

E | T | G | D

E | T | G | D

E | T | G | D

E

Veja que, com 13 pessoas, satisfazemos o que a questão pede: quatro funcionários serem do mesmo cargo.

$$N = 35 - 5 - 10 = 20 \text{ comissões}$$

Letra c.

072. (FCC/SEDU-ES/PROFESSOR DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO/2018) Uma pessoa decidiu criar uma senha com dois algarismos ímpares diferentes e uma vogal, em qualquer ordem. O número total de senhas diferentes que ela pode criar é igual a

- a) 600.
- b) 450.
- c) 300.
- d) 900.
- e) 550.



A senha tem dois algarismos e uma vogal. Para compô-la, precisamos escolher 2 algarismos dentre os 5 possíveis (1, 3, 5, 7 ou 9) e também 1 vogal dentre as possíveis (a, b, c, d, e). Portanto, há $C(5,2)$ possibilidades de escolha para os algarismos ímpares e 5 possibilidades de escolha para as vogais.

$$\frac{\binom{5}{2} \quad 5}{\text{2 Algarismos} \quad \text{Vogais} \quad \text{Escolhas}} = \binom{5}{2} \cdot 5$$

Vamos fazer as contas do número binominal.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Temos, portanto, 50 possibilidades de escolhas, sem contar as possíveis permutações.

$$n = 10.5 = 50$$

Agora, vamos considerar as permutações. Como são três elementos, temos 3! permutações.

$$N = 50.6 = 300 \text{ possibilidades}$$

A despeito disso, a banca considerou o gabarito 600.

A meu ver, a banca adotou uma resolução inadequada, em que ela considerou duas vezes as permutações possíveis entre os dois algarismos ímpares.

5	.	4	.	5	= 5.4.5 = 100 possibilidades
Algarismo 1		Algarismo 2		Vogal	Escolhas

A seguir, considerou as permutações possíveis entre os 3 elementos escolhidos.

$$N = 100.3! = 100.6 = 600 \text{ possibilidades}$$

Dessa forma, chega-se ao gabarito. Porém vejo essa resolução como incorreta. A meu ver, a resposta correta seria 300 possibilidades, mas a banca considerou 600.

Letra a.

073. (FGV/SENADO FEDERAL/ANALISTA LEGISLATIVO/2008) Em uma reunião todas as pessoas se cumprimentaram, havendo ao todo 120 apertos de mão. O número de pessoas presentes nessa reunião foi:

- a) 14
- b) 15
- c) 16
- d) 18
- e) 20



Seja N o número de pessoas presentes na sala. Um aperto de mão é feito entre duas pessoas. Para definir um aperto de mão, precisamos escolher 2 pessoas dentre N, sem importar a ordem – tanto faz se A aperta a mão de B ou se B aperta a mão de A.

Sendo assim:

$$\binom{N}{2} = 120$$

$$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} = 120 \therefore N(N-1) = 120 \cdot 2 = 240$$

Aqui, muitos alunos ficariam tentados a multiplicar N por N-1 e chegar a uma equação do segundo grau. Porém podemos resolver tal problema de um modo mais simples.

Perceba que o número de pessoas na sala é inteiro, portanto, N e N-1 devem ser divisores de 240.

O modo mais fácil de obter os divisores de 240 é fatorando-o em fatores primos.

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	2 ⁴ .3.5

Por sorte ou por destino, encontramos que a fatoração de 240 em fatores primos é:

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 16 \cdot 15$$

Isso nos permite concluir, rapidamente, que havia 16 pessoas na sala, pois N = 16 e (N-1) = 15, de modo que o produto N(N-1) = 240.

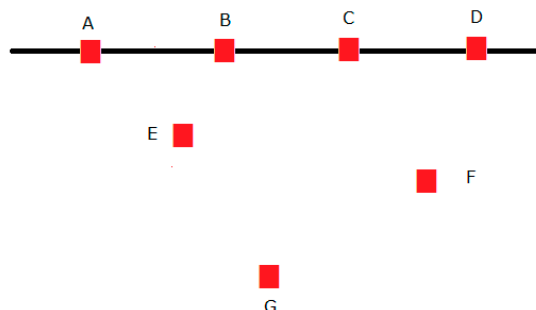
Letra c.

074. (ESAF/AFRFB/2009) Sabe-se que os pontos A, B, C, D, E, F e G são coplanares, ou seja, estão localizados no mesmo plano. Sabe-se, também, que destes sete pontos, quatro são colineares, ou seja, estão numa mesma reta. Assim, o número de retas que ficam determinadas por estes sete pontos é igual a:

- a) 16
- b) 28
- c) 15
- d) 24
- e) 32



De acordo com o enunciado, temos a seguinte disposição dos pontos.

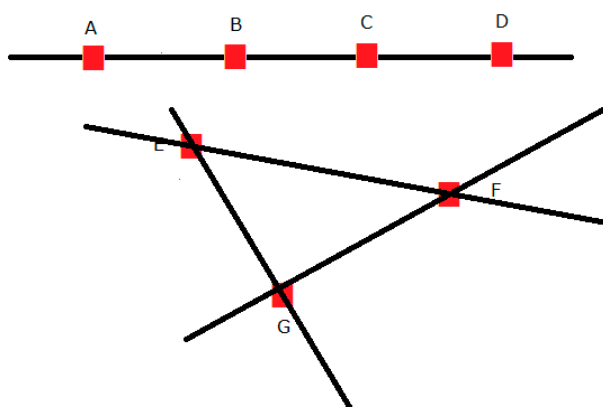


Para formar uma reta, devemos escolher dois pontos. Porém perceba que, escolhendo quaisquer dos quatro pontos colineares (A, B, C e D), a reta formada será a mesma. Portanto, vamos separar o problema em três casos.

No primeiro caso, escolheremos quaisquer dos três pontos fora da reta (E, F ou G). Como a ordem não importa, temos um total de:

$$n_1 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1} = 3$$

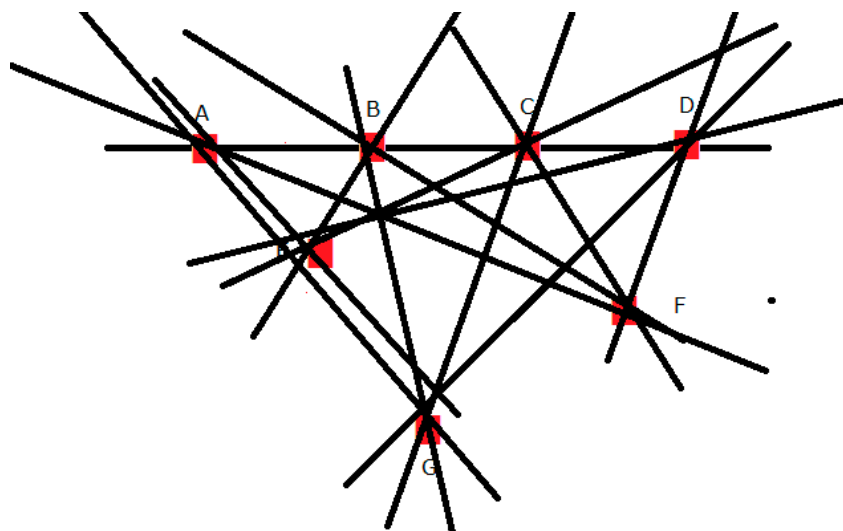
Essas três retas podem ser visualizadas:



No segundo caso, escolheremos um ponto fora da reta (E, F ou G) e um ponto na reta (A, B, C ou D). Nesse caso, temos 3 possibilidades para o ponto fora e 4 possibilidades para o ponto na reta.

$$n_2 = 3 \cdot 4 = 12$$

Essas 12 retas podem ser visualizadas na figura. Perceba que temos 4 retas saindo de cada ponto E, F e G.



Por fim, temos que adicionar a própria reta formada pelos 4 pontos colineares. Sendo assim, o total de retas é:

$$N = 3 + 12 + 1 = 16$$

Letra a.

075. (ESAF/AFRFB/2014) Um polígono regular possui 48 diagonais que não passam pelo seu centro. A partir desta informação, pode-se concluir que o número de lados desse polígono é igual a:

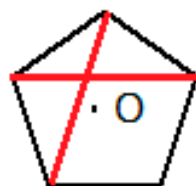
- a) 12
- b) 36
- c) 24
- d) 48
- e) 22



Essa é uma questão deveras difícil. Mas fácil mesmo é ficar nas maravilhosas praias de Recife. Essa questão é para você passar em um dos concursos mais desejados do Brasil, com um dos melhores planos de carreira de todo o serviço público – Auditor Fiscal da Receita Federal. Então, tem que ser para rachar a cuca mesmo.

Em primeiro lugar, devemos entender o que são as diagonais de um polígono. As diagonais são segmentos de reta que unem dois vértices, mas que não são os lados.

Quando o polígono é formado por um número ímpar de lados, nenhuma diagonal passa pelo centro. Tomemos, como exemplo, esse pentágono.

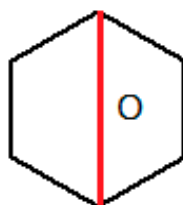


Para formar uma diagonal, primeiro devemos escolher um vértice. Temos N opções. Depois, podemos escolher qualquer vértice que não seja o próprio vértice escolhido no passo anterior nem os seus dois vizinhos, pois, nesse caso, formariam um lado, não uma diagonal. Sendo assim, são $N-3$ opções.

Além disso, devemos descontar as permutações entre os dois vértices ($2!$). Isso acontece porque, quando traçamos a diagonal 1-3, ela é igual à diagonal 3-1. Sendo assim, o número de diagonais que não passam pelo centro será:

$$D = \frac{N(N-3)}{2!} = \frac{N(N-3)}{2}$$

Por outro lado, quando o número de lados for par, temos uma situação importante a notar. Quando os vértices são diametralmente opostos, a diagonal passa pelo centro.



Dessa maneira, para formar uma diagonal, no primeiro passo, podemos escolher qualquer um dos N vértices. Mas, no segundo passo, não podemos escolher 4 opções: o próprio vértice já escolhido, os dois vizinhos e o que está diametralmente oposto. Além disso, devemos dividir por $2!$ Pelo mesmo motivo explicado anteriormente.

$$D = \frac{N(N-4)}{2!} = \frac{N(N-4)}{2}$$

Sendo assim, temos duas expressões diferentes, a depender se o número de lados do polígono é par.

Podemos adotar um procedimento igual à questão anterior. Porém também podemos testar diretamente as respostas.

Na letra A, temos $N = 12$. Como 12 é par, o número de diagonais que não passam pelo centro de um polígono de 12 lados é:

$$D = 12 \cdot \frac{12 - 4}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$$

Já encontramos a resposta.

Letra a.

076. (CESPE/FUB/CONHECIMENTOS BÁSICOS/2015) (♥), espadas (♠), ouros (♦) e paus (♣), viradas para baixo. As cartas do baralho, em ordem crescente de importância, são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Q (dama), J (valete), K (rei) e A (ás). Nesse jogo, cada jogador recebe cinco cartas e pode descartar algumas ou todas e receber outras novas, na mesma quantidade, de modo a ficar sempre com cinco cartas na mão. O jogador com o melhor jogo, isto é, com a sequência de cinco cartas que vale mais pontos, ganha a rodada. As sequências de jogos vencedoras no pôquer fechado, em ordem crescente de importância, são:

- par – formado por duas cartas de mesmo valor e três outras sem relação (por exemplo: [Q♣] [Q♠] [2♥] [4♥] [5♣]);
- dois pares – formado por duas cartas de mesmo valor, mais outras duas também de mesmo valor (mas de valor diferente do primeiro par) e uma carta não relacionada com as dos pares (por exemplo: [3♥] [3♦] [10♠] [10♥] [A♠]);
- trinca – formado por três cartas de mesmo valor e outras duas sem relação (por exemplo: [J♠] [J♦] [J♥] [6♥] [7♥]);
- straight (sequência) – formado por cinco cartas em sequência de naipes diferentes (por exemplo: [5♣] [6♠] [7♥] [8♥] [9♣]);
- flush – formado por cinco cartas do mesmo naipe (por exemplo: [4♣] [5♣] [10♣] [Q♣] [J♣]);
- full house – formado por um par e uma trinca (por exemplo: [Q♣] [Q♠] [A♥] [A♠] [A♦]);
- quadra – formado por quatro cartas do mesmo valor e uma carta qualquer (por exemplo: [10♣] [10♠] [10♥] [10♦] [3♠]);
- straight flush – formado por cinco cartas em sequência e do mesmo naipe (por exemplo: [7♥] [8♥] [9♥] [10♥] [Q♥]);
- royal straight flush – formado pela sequência máxima, isto é, dez, dama, valete, rei e ás, todas do mesmo naipe (por exemplo: [10♠] [Q♠] [J♠] [K♠] [A♠]).

Com base nessas informações, julgue os seguintes itens, a respeito do jogo de pôquer fechado.

A quantidade de pares simples, e nenhum jogo melhor, que podem ser formados é igual a $6 \times 44 \times C_{13,9}$.



Essa é provavelmente uma das questões mais difíceis já produzidas para concursos públicos. O que torna essa questão tão especial é o fato de que não podemos formar nenhum jogo melhor que um par.

Então, vamos proceder da seguinte forma:

- Escolhemos um par de cartas para formar um par simples. Essas cartas precisam ser do mesmo número. Como só temos um baralho, elas não podem ser do mesmo naipe – isso facilita bastante, pois não temos a possibilidade de formar um flush ou um straight;
- As próximas três cartas precisam ser de números diferentes do número que foi escolhido anteriormente, para não formar uma trinca, e também precisam ser de números diferentes entre si, para não formar outro par.

Vamos escolher as cartas que formam o par simples. Podemos tomar qualquer uma das 52 cartas. Portanto, para a primeira carta, temos 52 opções. Para a segunda, precisamos escolher uma carta de mesmo número da anterior, portanto, só restam 3 opções – as cartas de naipes diferentes.

Exemplo: se escolhemos $[10\spadesuit]$ na primeira carta, só podemos escolher $[10\clubsuit]$, $[10\heartsuit]$ ou $[10\diamondsuit]$ na segunda.

<u>52</u>	X	<u>3</u>	=	<u>52.3</u>
1. ^a Carta		2. ^a Carta		Total

Observe, ainda, que a ordem das cartas não importa. Por isso, precisamos dividir por 2! Pouco importa se escolhemos $[10\spadesuit]$ como a primeira carta e $[10\clubsuit]$ como a segunda ou se trocamos a ordem, escolhendo $[10\clubsuit]$ na primeira carta e $[10\spadesuit]$ na segunda.

Portanto, o total de formas de escolher as cartas que formam o par simples é:

$$n_1 = \frac{52.3}{2!} = 26.3$$

No segundo passo, as próximas três cartas precisam ser de números diferentes – e não podemos escolher o número já escolhido no passo anterior. Precisamos, portanto, escolher 3 números num total de 12.

Portanto, o número de maneira que podemos escolher os números das três cartas é:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9! 3!}$$

Já escolhemos os números dessas cartas. Porém elas podem ser de qualquer naipe. Temos 4 opções para o naipe da terceira carta, 4 opções para o naipe da quarta e 4 opções para o naipe da quinta.

$$\frac{\binom{12}{3}}{\text{Números}} \times \frac{4}{\text{Naipe da 3.ª}} \times \frac{4}{\text{Naipe da 4.ª}} \times \frac{4}{\text{Naipe da 5.ª}} = 4^3 \binom{12}{3}$$

Portanto, o número de combinações possíveis é:

$$\frac{26.3}{\text{1.ª e 2.ª Cartas}} \times \frac{4^3 \binom{12}{3}}{\text{3.ª, 4.ª e 5.ª Cartas}} = \text{Total}$$

$$N = 26.3.4^3 \binom{12}{3}$$

O CESPE ainda foi profundamente sagaz em trabalhar esse número.

$$N = 26.3.4^3 \binom{12}{3} = 13.2.3.4^3 \cdot \frac{12!}{9!3!}$$

$$N = 13.6.4^3 \cdot \frac{12.11.10}{3.2.1} = 6.4^3 \cdot \frac{13.12.11.10}{3.2.1}$$

Multiplicando por 4 em cima e em baixo, chegamos a mais um binomial.

$$N = 6.4^3 \cdot 4 \cdot \frac{13.12.11.10}{4.3.2.1} = 6.4^4 \cdot \frac{13!}{9!4!} = 6.4^4 \binom{13}{4}$$

Como os binomiais $\binom{13}{4} = \binom{13}{9}$ são iguais, temos que:

Certo.

077. (ESAF/AFRFB/CARGO/2009–ANULADA) De quantas maneiras podem sentar-se três homens e três mulheres em uma mesa redonda, isto é, sem cabeceira, de modo a se ter sempre um homem entre duas mulheres e uma mulher entre dois homens?

- a) 72
- b) 36
- c) 216
- d) 820
- e) 360



Se a mesa não fosse redonda, teríamos duas possibilidades de cobrir a mesa, em que M e H representam, respectivamente, mulher e homem.

M	H	M	H	M	H	Total
H	M	H	M	H	M	Total

No primeiro caso, para a primeira mulher, temos 3 opções, pois pode ser qualquer uma. Para o primeiro homem, também temos 3 opções, pois pode ser qualquer um. Para a segunda mulher, temos 2 opções, porque a que já foi escolhida anteriormente não pode ser repetida. O mesmo é válido para o segundo homem. Portanto, temos:

3	.	3	.	2	.	2	.	1	.	1	=36
M		H		M		H		M		H	Total
3	.	3	.	2	.	2	.	1	.	1	=36
H		M		H		M		H		M	Total

Tem-se, portanto, 72 possibilidades de organização dos homens e das mulheres numa mesa que não fosse redonda.

Como a mesa é redonda e tem 6 lugares, devemos descontar as 6 rotações.

$$N = \frac{72}{6} = 12$$

Por conta disso, a questão, infelizmente, está nula.

Anulada.

078. (CESPE/ANAC/ESPECIALISTA EM REGULAÇÃO-ECONOMIA/2009) Considere que, em uma empresa, seja utilizado sistema de códigos com apenas dois tipos de símbolos (1 e 2), sendo cada código formado por uma sequência desses símbolos, cuja ordem é igual à soma dos algarismos que formam o código, a exemplo dos códigos distintos 1, 11, 12 e 121, que são de ordem 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Considere, ainda, que $s(0) = 1$ e que $s(n)$ é igual ao número de códigos distintos de ordem n , $n > 1$,

Existem, no máximo, 55 códigos distintos de ordem menor ou igual a 10.



Os códigos de ordem 10 são formados por uma certa quantidade x de dígitos 1 e uma quantidade y de dígitos 2. Temos que:

$$x + 2y = 10$$

Como 10 e 2y são pares, note que x também deverá ser par.

Sendo assim, comecemos com x = 0. Nesse caso, temos y = 5, e o código será 22222. Só existe uma possibilidade.

Quando x = 2, teremos y = 4. Nesse caso, temos o número 112222 e suas permutações, que podem ser calculadas por:

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4! 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

Quando x = 4, teremos y = 3. Nesse caso, temos o número 1111222 e suas permutações, que podem ser calculadas por:

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Quando x = 6, teremos y = 2. Nesse caso, temos o número 11111122 e suas permutações, que podem ser calculadas por:

$$P_8^{6,2} = \frac{8!}{6! 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2 \cdot 1} = 28$$

Quando x = 8, teremos y = 1. Nesse caso, temos o número 111111112 e suas permutações, que podem ser calculadas por:

$$P_9^{8,1} = \frac{9!}{8! 1!} = \frac{9 \cdot 8!}{8! \cdot 1} = 9$$

Quando x = 10, teremos y = 0. Nesse caso, temos o número 111111111. Nesse caso, só existe uma probabilidade.

Basta somar as possibilidades encontradas:

$$N_{10} = 1 + 15 + 35 + 28 + 9 + 1 = 89 > 55$$

Somente com o código de ordem 10 já superamos os 55 propostos pelo enunciado.

Errado.

079. (ITA/2015) Dispomos de seis cores diferentes. Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras isto pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica à outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo?

- a) 40
- b) 36
- c) 35

- d) 32
e) 30



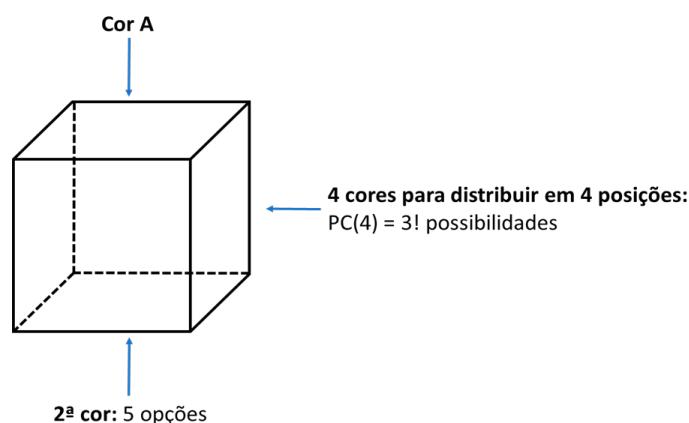
É uma questão bastante instrutiva e criativa.

Como todas as seis faces do cubo são iguais, suponha que escolhemos uma face qualquer para a cor 1. Colocamos essa face para cima apenas para facilitar a visualização.

Para a face inferior, teremos, portanto, 5 opções de cores, pois não podemos repetir a cor 1.

Para as faces laterais, temos 4 opções de cores e 4 faces. Trata-se, portanto, de uma permutação circular. São, portanto, $3! = 6$ opções.

Sendo assim, o total de possibilidades é $5 \cdot 6 = 30$ possibilidades.



Letra e.

080. (IBFC/MPE-SP/AUXILIAR DE PROMOTORIA-MOTORISTA/2011) Um livro de ensino médio tem 262 páginas. Os exercícios estão dispostos nas páginas numeradas com múltiplos de 5 e as soluções dos exercícios estão dispostas nas páginas numeradas com múltiplos de 13. O número de folhas que não figuram exercícios ou soluções é de:

- a) 64
b) 67
c) 124
d) 190



Uma questão bastante interessante sobre o Princípio da Inclusão e Exclusão.

Perceba que o enunciado pediu “o número de folhas”. Uma folha é diferente de uma página.

Cada folha tem duas páginas. A primeira folha de um livro contém as páginas 1 e 2. Portanto, um livro de 262 páginas tem 131 folhas. Portanto, o conjunto universo será formado por 131 folhas.

Agora, precisamos determinar quantas dessas folhas possuem exercícios ou soluções.

Seja E o conjunto das folhas que possuem exercícios. Sabemos que E contém as páginas múltiplas de 13.

As páginas de E são $E = \{13, 26, 39, \dots\}$. Temos que o número de elementos desse conjunto deve ser obtido pela divisão entre 262 e 13.

$$\begin{array}{r} 262 \overline{) 13} \\ -260 \quad 20 \\ \hline = 2 \end{array}$$

Portanto, existem 20 páginas no livro com exercícios. É importante notar que essas páginas, necessariamente, estão em folhas diferentes, porque não existem múltiplos de 13 consecutivos. Portanto:

$$\#E = 20$$

Agora, seja S o conjunto das folhas que possuem as soluções desses exercícios. As páginas correspondentes a S são: $S = \{5, 10, 15, \dots\}$. O número de páginas desse conjunto é obtido pela divisão:

$$\begin{array}{r} 262 \overline{) 5} \\ -260 \quad 52 \\ \hline = 2 \end{array}$$

Todas essas páginas pertencem a folhas diferentes, porque não existem múltiplos de 5 consecutivos. Portanto:

$$\#S = 52$$

Finalmente, precisamos determinar a intersecção, ou seja, as folhas que contêm exercícios e soluções simultaneamente. Há duas possibilidades que precisamos considerar.

A primeira delas acontece quando os exercícios e as soluções estão na mesma página. Isso só acontece nas páginas que são múltiplas do MMC entre 5 e 13, que é 65. Portanto, são as páginas $\{65, 130, 195, 260\}$. Nesse caso, é relativamente fácil contar, mas sempre poderíamos apelar para a divisão.

Porém também precisamos considerar o caso em que os exercícios e as soluções estão na mesma folha, porém em páginas diferentes. Uma folha contém as páginas 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6, 7 e 8, 9 e 10 – e assim por diante. Por exemplo, as páginas 25 e 26 estão na mesma folha – a página 25 contém exercícios, e a 26 contém as soluções.

Em linguagem mais matemática, queremos saber quais múltiplos de 13 terminam em 6 ou em 9. Contemos:

$$E = \{13, \mathbf{26}, \mathbf{39}, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130, \dots\}$$

Agora, não precisamos mais contar um a um. Como já chegamos em um múltiplo de 10, sabemos que $26 + 130 = 156$ e $39 + 130 = 169$ também são páginas que estamos procurando. Além disso, $156 + 130 = 286$ já está fora do livro. Portanto, as folhas que contêm exercícios e soluções são:

$$E \cap S = \{25 - 26, 39 - 40, 65, 130, 155 - 156, 169 - 170, 195, 260\}$$

$$\therefore \#E \cap S = 8$$

Dessa maneira, o total de folhas que contêm soluções ou exercícios corresponde à união:

$$\#E \cup S = \#E + \#S - \#(E \cap S) = 20 + 52 - 8 = 64$$

Como o problema pediu as folhas que **não** figuram exercícios ou soluções, na verdade, ele pediu o número de elementos do complementar da união.

$$\#(E \cup S)^c = 131 - 64 = 67$$

Letra b.

Chegamos ao final da nossa aula.

Até o nosso próximo encontro.

Forte abraço!

Thiago Cardoso.

ANEXO

PERMUTAÇÕES CAÓTICAS

Uma permutação caótica consiste em um tipo especial de permutação, em que todos os elementos ocupam uma posição diferente da que ocupavam na sequência original.

Por exemplo, as palavras AMOR e ROMA são permutações caóticas.

A	M	O	R
R	O	M	A
1	2	3	4

Esse tema é muito raro de ser cobrado em questões de concurso público. Porém, se você gostou muito dessa área da Análise Combinatória e quer aprender sobre esse tema, que pode vir a ser cobrado em uma questão que vai surpreender a todos os candidatos, continue comigo nesse material.

Uma pergunta que poderia aparecer em uma prova de concurso seria: Quantas permutações caóticas existem na palavra AMOR?

Para responder a essa pergunta, vamos começar com os casos mais simples. Se uma palavra tem apenas duas letras, como a palavra AR, existe somente uma permutação caótica: a palavra RA.

Mas como poderíamos calcular?

A rota para isso é o Princípio da Inclusão e Exclusão.

- Vamos considerar todas as permutações possíveis da palavra AR. Chamaremos de N_1 ;
- Vamos excluir as permutações em que pelo menos exatamente uma das letras está na sua posição original.

O primeiro passo é simples de calcular. Mas o segundo requer um novo uso do Princípio da Inclusão e Exclusão. Para isso, devemos:

- excluir as permutações em que pelo menos uma das letras está na sua posição original;

incluir as permutações em que as duas letras estão na sua posição original, porque essas permutações foram contadas duas vezes no passo a passo anterior.

	—	+
Todas as permutações possíveis	Permutações em que pelo menos 1 elemento está na posição original	Permutações em que pelo menos 2 elementos estão na posição original

Um ponto ao qual devemos ter atenção é que, quando falamos “o número de permutações em que 1 elemento está na posição original”, esse elemento pode ser qualquer deles. Portanto, devemos escolher 1 elemento dentre o total de 2 elementos.

Além disso, como 1 elemento está na sua posição original, os demais elementos devem sofrer permutações. Portanto, devemos multiplicar pelas permutações de $(2 - 1)$ elementos.

$$\begin{array}{ccccc} \binom{2}{1} & \cdot & (2 - 1)! & = & \binom{2}{1} \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2 \\ \text{Escolher 1 elemento} & & \text{Permutações dos} & & \text{Permutações em que} \\ \text{dentre o total de 2} & & \text{demais elementos} & & \text{pelo menos 1 elemento} \\ \text{elementos} & & & & \text{está na posição original} \end{array}$$

Façamos o mesmo para as permutações em que pelo menos 2 elementos estão na sua posição original:

$$\begin{array}{ccccc} \binom{2}{2} & \cdot & (2 - 2)! & = & \binom{2}{2} \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1 \\ \text{Escolher 2 elemento} & & \text{Permutações dos} & & \text{Permutações em que} \\ \text{dentre o total de 2} & & \text{demais elementos} & & \text{pelo menos 2 elementos} \\ \text{elementos} & & & & \text{está na posição original} \end{array}$$

Dessa forma, poderíamos calcular o total de permutações caóticas.

$$\begin{array}{ccccccc} 2! & - & \binom{2}{1} \cdot 1! & + & \binom{2}{2} \cdot 0! & = & \\ \text{Todas as permutações} & & \text{Permutações em que} & & \text{Permutações em que} & & \\ \text{possíveis} & & \text{pelo menos 1 elemento} & & \text{pelo menos 2 elementos} & & \\ & & \text{está na posição original} & & \text{estão na posição original} & & \\ \\ 2 & - & 2 & + & 1 & = & 1 \\ \text{Todas as permutações} & & \text{Permutações em que} & & \text{Permutações em que} & & \\ \text{possíveis} & & \text{pelo menos 1 elemento} & & \text{pelo menos 2 elementos} & & \\ & & \text{está na posição original} & & \text{estão na posição original} & & \end{array}$$

Podemos estender esse mesmo raciocínio para palavras maiores.

Pense, por exemplo, que desejamos determinar o número de permutações caóticas da palavra DIA.

$$\begin{array}{ccccccc} 3! & - & \binom{3}{1} \cdot (3 - 1)! & + & \binom{3}{2} \cdot (3 - 2)! & - & \binom{3}{3} \cdot (3 - 3)! \\ & & \text{Pelo menos 1} & & \text{Pelo menos 2} & & \text{Pelo menos 3} \\ & & \text{elemento está na} & & \text{elementos estão na} & & \text{elementos estão na} \\ & & \text{posição original} & & \text{posição original} & & \text{posição original} \end{array}$$

Vamos calcular cada um dos termos:

$$3! = 3.2.1 = 6$$

$$\binom{3}{1} \cdot (3-1)! = \frac{3!}{1!2!} \cdot 2! = 3.2.1 = 6$$

$$\binom{3}{2} \cdot (3-2)! = \frac{3!}{2!1!} \cdot 1! = \frac{3.2.1}{2} = 3$$

$$\binom{3}{3} \cdot (3-3)! = \frac{3!}{3!0!} \cdot 0! = 1.1 = 1$$

Dessa forma, temos que o total de permutações caóticas da palavra DIA é:

$$N = 6 - 6 + 3 - 1 = 2$$

Existem, portanto, apenas duas permutações caóticas da palavra DIA. São elas: ADI e IAD. E se, agora, nós tentássemos fazer o número de permutações caóticas da palavra AMOR? Podemos montar um somatório, observando o seguinte:

- Os sinais dos termos incluídos nos somatórios alternam + e -;
- Os termos são formados pelo produto de um número binomial multiplicado por um número fatorial;
- O denominador do termo binomial é o mesmo número que aparece subtraindo o fatorial.

sinais + e - alternados

$$4! - \binom{4}{1} \cdot (3-1)! + \binom{4}{2} \cdot (3-2)! - \binom{4}{3} \cdot (4-3)! + \binom{4}{4} \cdot (4-4)!$$

Todas as permutações possíveis Pelo menos 1 elemento está na posição original Pelo menos 2 elementos estão na posição original Pelo menos 3 elementos estão na posição original Pelo menos 4 elementos estão na posição original

Agora, vamos calcular cada termo:

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$

$$\binom{4}{1} \cdot (4-1)! = \frac{4!}{1!3!} \cdot 3! = 4.3.2.1 = 24$$

$$\binom{4}{2} \cdot (4-2)! = \frac{4!}{2!2!} \cdot 2! = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

$$\binom{4}{3} \cdot (4-3)! = \frac{4!}{3!1!} \cdot 1! = \frac{4.3!}{3!} = 4$$

$$\binom{4}{4} \cdot (4-4)! = \frac{4!}{4!0!} \cdot 0! = 1$$

Dessa forma, podemos calcular o total de permutações caóticas, usando sinais alternados.

$$N = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$$

Concluimos, então, a existência de 9 permutações caóticas da palavra AMOR. Consegue ver quais são elas?

As 9 permutações caóticas possíveis da palavra AMOR são: MARO, MRAO, MORA, OARM, ORMA, ORAM, RAMO, ROMA, ROAM.

Podemos, ainda, generalizar o conceito de permutações caóticas para uma palavra com N letras distintas.

sinais + e – alternados

$$\begin{array}{ccccccc}
 n! & - & \binom{n}{1} \cdot (n-1)! & + & \binom{n}{2} \cdot (n-2)! & - & \dots & + & \binom{n}{n} \cdot (n-n)! \\
 \text{Todas as} & & \text{Pelo menos 1} & & \text{Pelo menos 2} & & & & \text{Pelo menos n} \\
 \text{permutações} & & \text{elemento está na} & & \text{elementos estão na} & & & & \text{elementos estão na} \\
 \text{possíveis} & & \text{posição original} & & \text{posição original} & & & & \text{posição original}
 \end{array}$$

Podemos organizar na forma de somatório:

$$N = n! - \binom{n}{1} \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! - \binom{n}{3} \cdot (n-3)! + \binom{n}{4} \cdot (n-4)! - \dots \binom{n}{n} \cdot (n-n)!$$

Podemos, ainda, chegar em uma expressão interessante:

$$N = n! - \frac{n!}{(n-1)! 1!} \cdot (n-1)! + \frac{n!}{(n-2)! 2!} \cdot (n-2)! - \dots + \frac{n!}{0! n!} \cdot (0)!$$

Vamos simplificar os binomiais que vamos destacar a seguir:

$$N = n! - \frac{n!}{(n-1)! 1!} \cdot (n-1)! + \frac{n!}{(n-2)! 2!} \cdot (n-2)! - \dots + \frac{n!}{0! n!} \cdot (0)!$$

$$N = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots \frac{n!}{n!}$$

Podemos deixar o $n!$ em evidência. Teremos:

$$N = n! \cdot \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{n!} \right]$$

Obs.:

Considero desnecessário saber essa fórmula. Saber o raciocínio que levou até ela é suficiente.

DIRETO DO CONCURSO

001. (FCC/PREFEITURA DE RECIFE-PE/ASSISTENTE DE GESTÃO PÚBLICA/2019) Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação

- a) de 4 maneiras diferentes.
- b) de 24 maneiras diferentes.
- c) de 9 maneiras diferentes.
- d) de 6 maneiras diferentes.
- e) de 12 maneiras diferentes.



Trata-se de uma permutação caótica, ou seja, aquela em que as 4 pessoas ocupam posições diferentes da posição original. Para isso, vamos utilizar a técnica aprendida.

Vamos obter o total de permutações possíveis dos quatro elementos.

$$Total = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Agora, vamos calcular o total de permutações em que uma pessoa está no seu lugar original. Para isso, devemos escolher uma pessoa (4 opções) e realizar as permutações entre os demais 3 elementos (3! permutações).

$$Uma\ Pessoa\ Está\ no\ Seu\ Lugar\ Original = 4 \cdot (4 - 1)! = 4.3! = 4.6 = 24$$

Façamos, agora, a conta do número de permutações em que 2 elementos ocupam a sua posição original. Para isso, devemos manter 2 pessoas nos seus lugares originais – existem $C(4,2)$ possibilidades de escolher essas duas pessoas – e realizar as permutações entre os demais 2 elementos (2! permutações).

$$Duas\ Pessoas\ Estão\ no\ Seu\ Lugar\ Original = \binom{4}{2} \cdot (4 - 2)! = 6.2! = 12$$

Façamos, agora, a conta das permutações em que 3 pessoas ocupam o mesmo lugar. Para isso, devemos escolher 3 pessoas – são $C(4,3)$ possibilidades – e realizar permutações entre o 1 elemento restante.

$$Três\ Pessoas\ Estão\ no\ Seu\ Lugar\ Original = \binom{4}{3} \cdot (4 - 3)! = 4.1! = 4$$

Por fim, chegamos às permutações em que todos os elementos ocupam a posição original. É somente:

$$\text{Quatro Pessoas Estão no Seu Lugar Original} = \binom{4}{4} \cdot (4 - 4)! = 1 \cdot 0! = 1$$

Finalmente, vamos aplicar o Princípio da Exclusão e Inclusão. Para isso, basta subtrair e somar alternadamente os valores calculados.

$$N = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$$

Também poderíamos usar a estrutura que vimos na teoria.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \text{sinais + e - alternados} & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 4! & - & \binom{4}{1} \cdot (3 - 1)! & + & \binom{4}{2} \cdot (3 - 2)! & - & \binom{4}{3} \cdot (4 - 3)! & + & \binom{4}{4} \cdot (4 - 4)! \\
 & & \text{Pelo menos 1} & & \text{Pelo menos 2} & & \text{Pelo menos 3} & & \text{Pelo menos 4} \\
 & & \text{elemento está na} & & \text{elementos estão na} & & \text{elementos estão na} & & \text{elementos estão na} \\
 & & \text{posição original} & & \text{posição original} & & \text{posição original} & & \text{posição original}
 \end{array}$$

Agora, vamos calcular cada termo:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$\binom{4}{1} \cdot (4 - 1)! = \frac{4!}{1! 3!} \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$\binom{4}{2} \cdot (4 - 2)! = \frac{4!}{2! 2!} \cdot 2! = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$$

$$\binom{4}{3} \cdot (4 - 3)! = \frac{4!}{3! 1!} \cdot 1! = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4$$

$$\binom{4}{4} \cdot (4 - 4)! = \frac{4!}{4! 0!} \cdot 0! = 1$$

Dessa forma, podemos calcular o total de permutações caóticas, usando sinais alternados.

$$N = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$$

A forma mais rápida de resolver esse problema seria usando a fórmula:

$$N = 4! \cdot \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right] = 24 \cdot \left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right]$$

$$N = 24 \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] = \frac{24}{2} - \frac{24}{3} + \frac{24}{4} = 12 - 9 + 6 = 9$$

Letra c.

Abra



caminhos



crie

futuros

gran.com.br

