

MATEMÁTICA

Geometria Plana: Segmentos



Presidente: Gabriel Granjeiro

Vice-Presidente: Rodrigo Calado

Diretor Pedagógico: Erico Teixeira

Diretora de Produção Educacional: Vivian Higashi

Gerência de Produção de Conteúdo: Bárbara Guerra

Coordenadora Pedagógica: Élica Lopes

Todo o material desta apostila (incluindo textos e imagens) está protegido por direitos autorais do Gran. Será proibida toda forma de plágio, cópia, reprodução ou qualquer outra forma de uso, não autorizada expressamente, seja ela onerosa ou não, sujeitando-se o transgressor às penalidades previstas civil e criminalmente.

CÓDIGO:

240912446539



THIAGO CARDOSO

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.

SUMÁRIO

Apresentação	5
Geometria Plana: Segmentos	6
1. Semelhança de Triângulos	6
1.1. Semelhança de Triângulos	6
1.2. Congruência de Triângulos	13
1.3. Propriedades das Tangentes às Circunferências	14
2. Triângulos Retângulos	15
2.1. Aplicações em Quadriláteros	22
2.2. Relações Trigonométricas	23
2.3. Altura Relativa à Hipotenusa	31
3. Triângulos e Circunferências	34
3.1. Circunferência Circunscrita	34
3.2. Casos Particulares	36
3.3. Demonstração da Circunferência Circunscrita	38
3.4. Circunferência Inscrita	41
3.5. Demonstração da Circunferência Inscrita	42
4. Triângulos Quaisquer	50
4.1. Lei dos Cossenos	50
4.2. Lei das Áreas	53
4.3. Fórmula de Hierão	55
5. Polígonos	59
5.1. Soma dos Ângulos Internos	60
5.2. Ângulo Interno de um Polígono Regular	61
5.3. Ângulos Externos de um Polígono Regular	61
5.4. Polígonos Inscritos	64
Questões Comentadas em Aula	67

Exercícios	77
Gabarito	94
Gabarito Comentado.....	95

APRESENTAÇÃO

Olá, aluno(a)! Boas-vindas a mais uma aula de Geometria. Neste capítulo, vamos nos aprofundar nas medidas dos segmentos, em especial, nos triângulos.

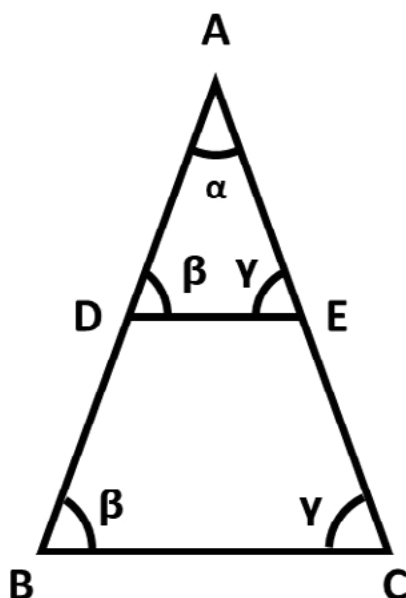
GEOMETRIA PLANA: SEGMENTOS

1. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1.1. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são semelhantes **quando possuem os mesmos ângulos**. Nesse caso, os seus lados são proporcionais.

O caso mais simples e comum de semelhança acontece **quando se traça uma reta paralela** a um dos lados de um triângulo. Vejamos:



Quando traçamos uma reta paralela a um dos lados, os ângulos definidos nos vértices D e E são iguais, respectivamente, aos ângulos definidos nos vértices B e C. Desse modo, o triângulo maior (ABC) e o menor (ADE) são semelhantes.

O enunciado clássico do problema de semelhança de triângulos é:

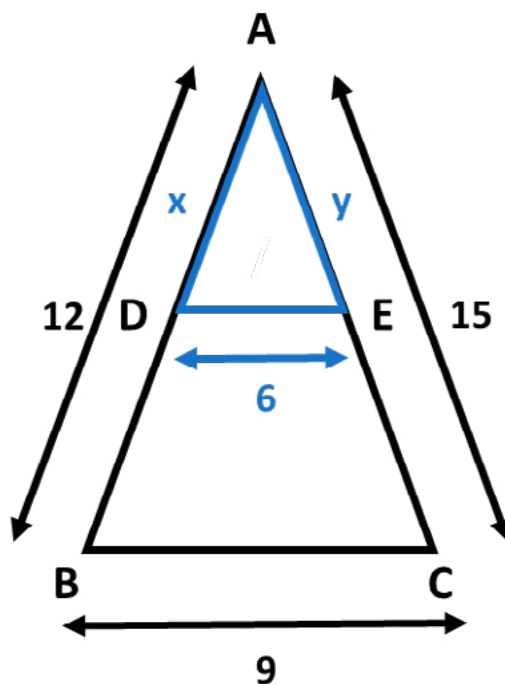
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Para você saber quais lados devem ser colocados nas proporções, basta olhar os lados paralelos. Note que AB e AD são paralelos – na realidade, o lado AB é uma continuação de AD. Por isso, esses dois lados devem ser colocados na razão.

Analogamente, o lado AC é uma continuação do lado AE. Por esse motivo, eles também são colocados na mesma fração. E, por fim, o lado BC é uma continuação do lado DE. Logo, eles são colocados na mesma fração.

Você deve manter a consistência nos numeradores e denominadores. Nesse caso, optamos por colocar os lados do triângulo maior sempre no numerador e os lados do triângulo menor sempre no denominador. Poderíamos ter feito o contrário também, sem problemas. O importante é você manter a consistência.

Vejamos um exemplo. São fornecidos os seguintes dados:



Com base nesses dados, será que podemos calcular os lados AD e AE?

Podemos sim, basta utilizar a relação de semelhança:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

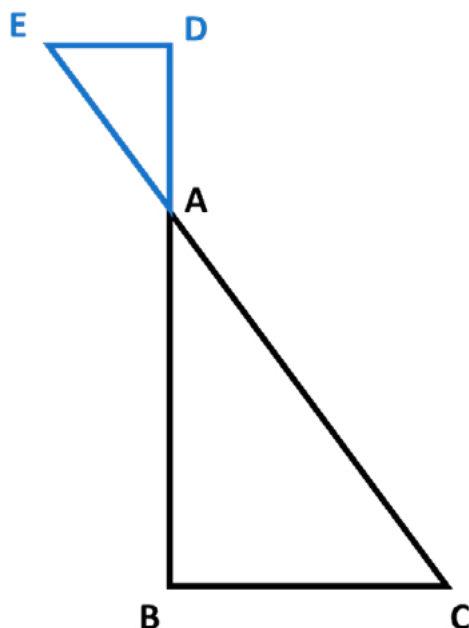
$$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{6}{9}$$

Por fim, basta resolver a proporção:

$$\frac{x}{12} = \frac{6}{9} \therefore x = AD = \frac{6 \cdot 12}{9} = 8$$

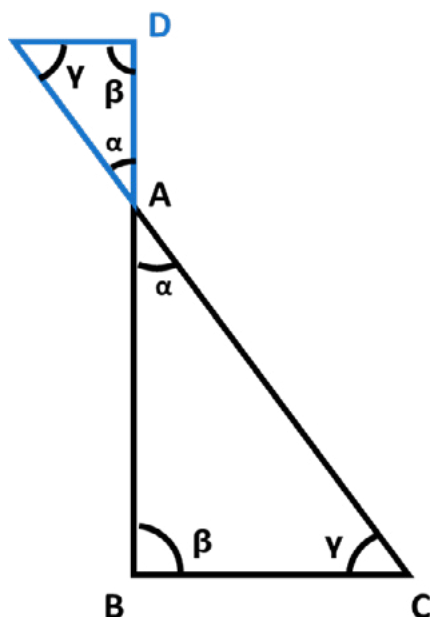
$$\frac{y}{15} = \frac{6}{9} \therefore y = AE = \frac{6 \cdot 15}{9} = 10$$

Uma variante desse problema acontece quando traçamos a paralela por fora do triângulo. Ficam dois triângulos, sendo um de cabeça para baixo, mas com os lados todos paralelos:



Nesse caso, podemos dizer que os triângulos são semelhantes devido às igualdades entre ângulos:

- os dois ângulos com vértice em A ($\angle BAC$ e $\angle EAD$) são opostos pelo vértice, portanto, são iguais;
- os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ADE$ são iguais, porque são ângulos entre retas paralelas, já que o segmento BC é paralelo ao segmento DE e o segmento AC é paralelo ao segmento AE ;
- os ângulos $\angle ACB$ e $\angle AED$ são iguais, porque também são ângulos entre retas paralelas, já que o segmento AC é paralelo ao segmento AE e o segmento BC é paralelo ao segmento ED .



Podemos, então, aplicar também a semelhança:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Para isso, usamos as mesmas regras do caso anterior. Como os lados AB e AD são paralelos, eles foram colocados na mesma fração. Analogamente, o lado AC é paralelo ao lado AE, então, eles são colocados na mesma fração. Por fim, os lados BC e DE são paralelos.

Além disso, devemos manter a consistência: no numerador, sempre os lados do triângulo ABC e, no denominador, sempre os lados do triângulo ADE.

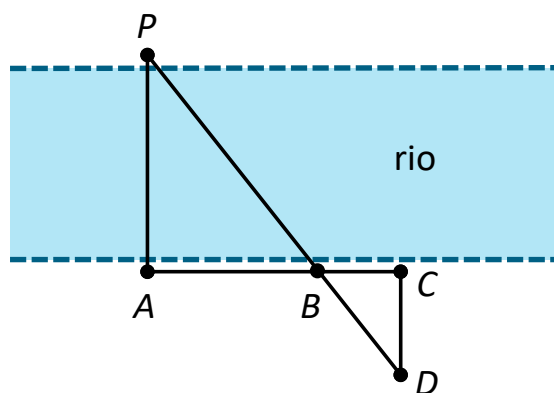
DIRETO DO CONCURSO



001. (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR/BA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR II/DIREITO/2017) A figura a seguir mostra um rio de margens retas e paralelas.

João, que está em uma das margens, gostaria de obter uma medida aproximada da largura do rio. Para isso, adotou o seguinte procedimento:

- buscou um ponto de referência na margem oposta e encontrou a pedra P;
- fixou uma estaca no ponto A, de forma que AP fosse perpendicular ao rio;
- caminhou paralelamente ao rio, fixou uma estaca em B e depois outra em C;
- a partir de C, caminhou perpendicularmente ao rio até que, no ponto D, viu as estacas B e P alinhadas com D;
- fixou mais uma estaca nesse ponto e, com uma trena, mediu as distâncias $AB = 20\text{m}$, $BC = 6\text{m}$ e $CD = 8,4\text{m}$.



A distância, em metros, de A até P é de:

a) 22,6

- b) 24,0
- c) 25,5
- d) 27,2
- e) 28,0



Observe que os triângulos PAB e BCD são semelhantes, assim temos:

$$PAB \approx BCD$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$$

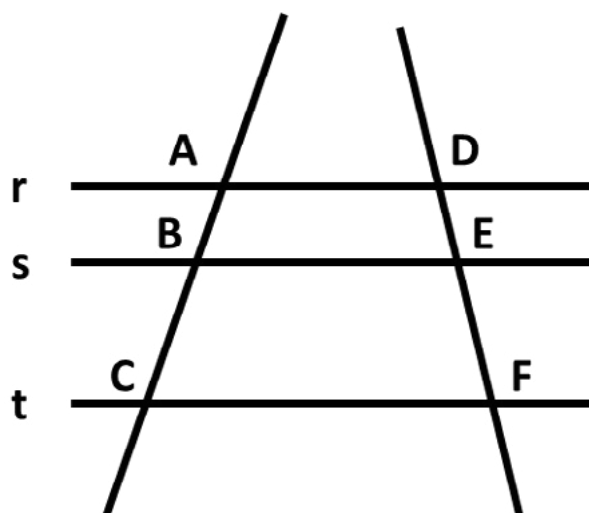
$$\frac{\overline{PA}}{8,4} = \frac{20}{6}$$

$$\therefore \overline{PA} = \frac{20 \cdot 8,4}{6} = \frac{168}{6} = \frac{84}{3} = 28 \text{ m}$$

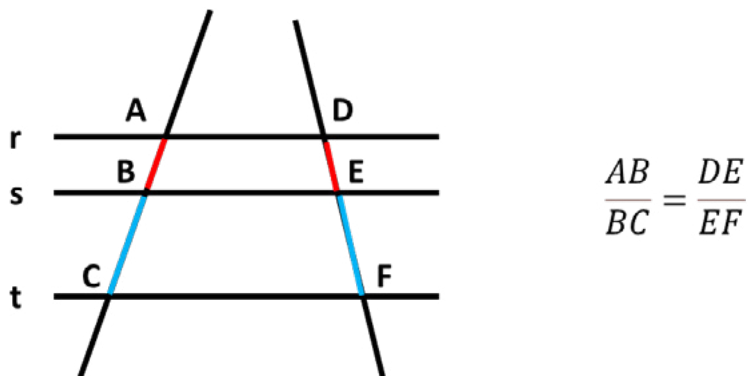
Letra e.

1.1.1. TEOREMA DE TALES

O Teorema de Tales é uma consequência da semelhança de triângulos. Esse teorema aparece quando se tem um feixe de retas paralelas e duas transversais. Na situação mostrada a seguir, as retas **r**, **s** e **t** formam um feixe de retas paralelas.



Pelo Teorema de Tales, os segmentos das transversais definidos entre cada uma das retas paralelos são proporcionais. Isso significa que:

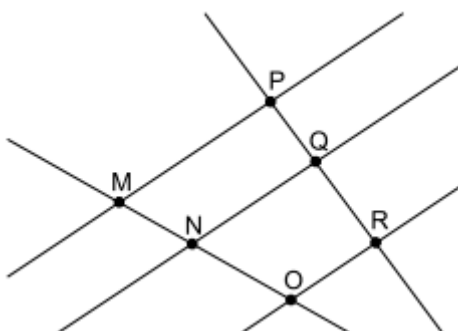


Observe que, no denominador das expressões, temos os segmentos AB e DE, que são os segmentos definidos pelas transversais entre as retas **r** e **s**.

Por outro lado, os segmentos BC e EF são os segmentos definidos pelas transversais entre as retas **s** e **t**.

DIRETO DO CONCURSO

002. (VUNESP/PREFEITURA DE CANANÉIA/PROFESSOR DE ENSINO FUNDAMENTAL/2020)
Em um livro didático, consta a seguinte figura:



Sobre essa figura, há informações, no livro, de que as retas que contêm os pontos M e P, N e Q, e O e R são paralelas, e que as medidas dos segmentos de extremidades MN, PQ e PR, em certa unidade de medida u , são iguais a $5u$, $4u$ e $9u$, respectivamente.

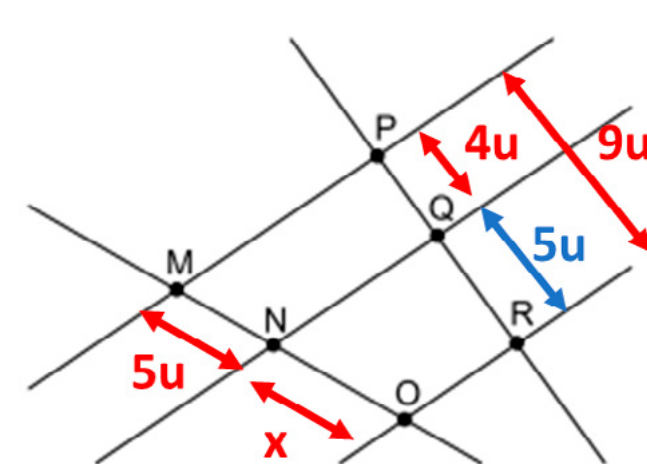
Como exercício, é solicitado que o aluno determine a medida do segmento NO, na unidade de medida u , cuja resposta correta é:

- a) 5,25.
- b) 5,50.

- c) 5,75.
- d) 6,00
- e) 6,25.



Observe a figura a seguir.



Segundo o Teorema de Tales, podemos afirmar que:

$$\frac{MN}{NO} = \frac{PQ}{QR}$$

A medida do segmento QR foi mostrada acima e é igual a 5u, pois corresponde à diferença entre o segmento total PR = 9 u e o segmento PQ = 4 u. Assim, substituindo as medidas dos segmentos no Teorema de Tales, temos:

$$\frac{5u}{NO} = \frac{4u}{9u - 4u}$$

$$\frac{5u}{NO} = \frac{4u}{5u}$$

$$NO = \frac{5u \cdot 5u}{4u}$$

$$NO = \frac{25u^2}{4u}$$

$$\therefore NO = 6,25u$$

Letra e.

1.2. CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são congruentes quando possuem **todos os lados e todos os ângulos iguais**.

Um triângulo tem 3 lados e 3 ângulos, totalizando 6 medidas. Como existe uma relação de compromisso entre lados e ângulos, para reconhecer dois triângulos semelhantes, só é necessário reconhecer a igualdade entre 3 dessas medidas, sendo, pelo menos um lado.

- **Caso LLL (lado, lado, lado):** esse é o caso mais simples em que sabemos que todos os lados são iguais.

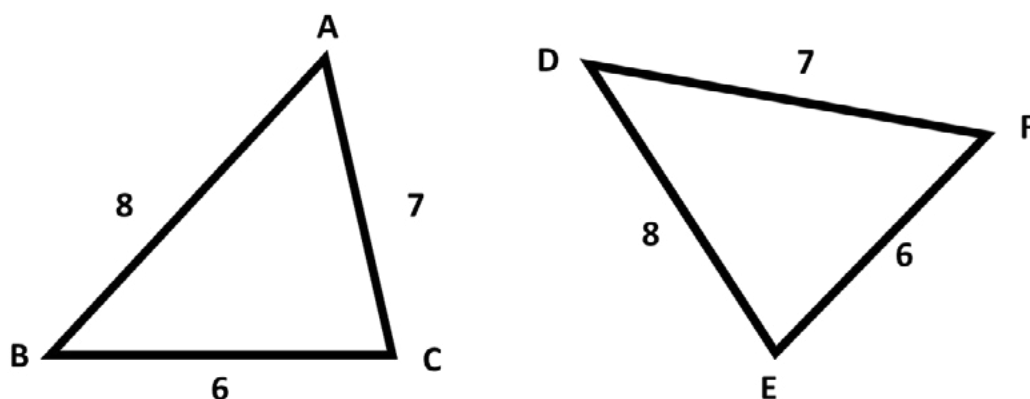


Figura 15: Congruência LLL

Nesse caso, podemos concluir as seguintes relações entre os ângulos internos de ABC e DEF:

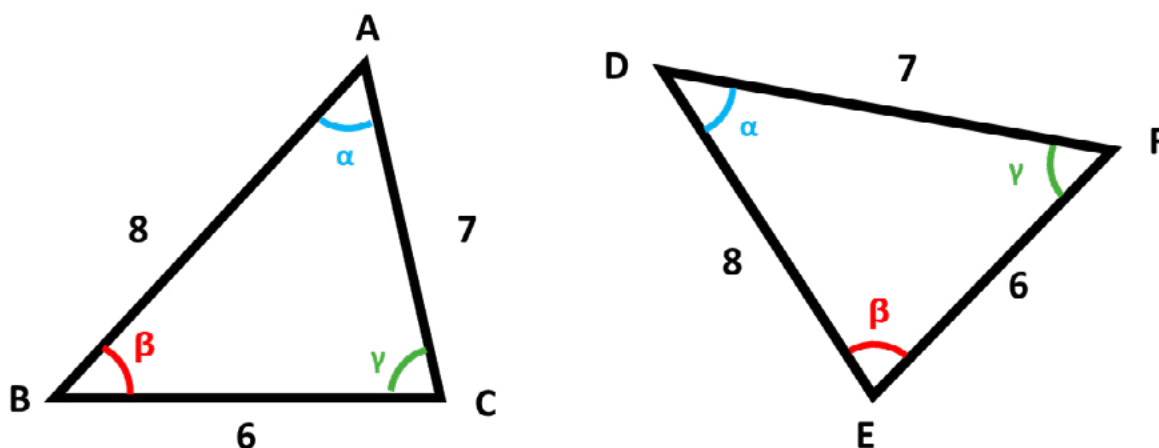


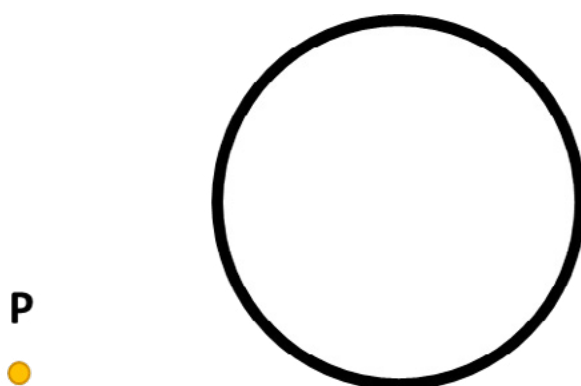
Figura 15: Conclusões sobre a Congruência LLL

É importante que você não perca de vista as oposições entre lado e ângulo. O ângulo β (beta) é o ângulo oposto ao lado de comprimento igual a 7 em ambos os triângulos.

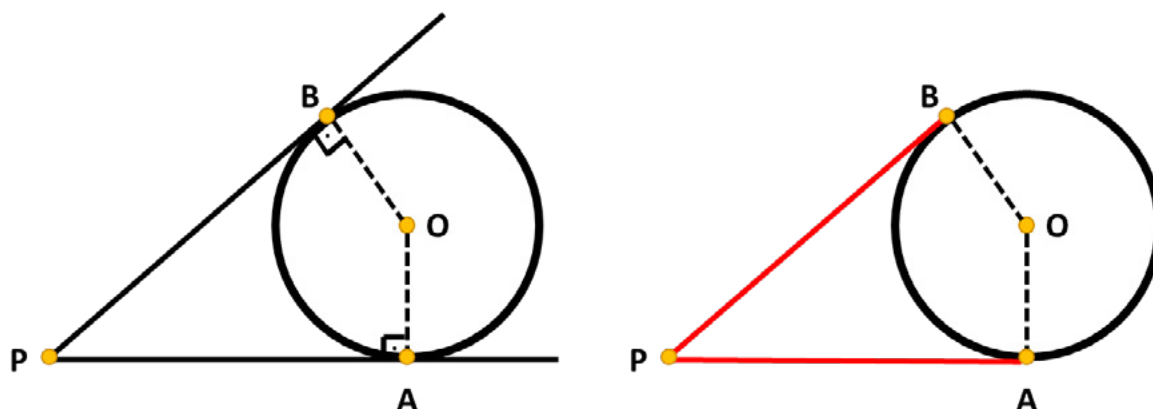
- **Caso LAL (lado, ângulo, lado):** se formos capazes de provar que dois lados são iguais e o ângulo formado entre eles também é igual, os dois triângulos serão congruentes.
- **Caso ALA ou LAA (ângulo, lado, ângulo):** quando dois ângulos são congruentes e um lado qualquer dos triângulos é congruente.

1.3. PROPRIEDADES DAS TANGENTES ÀS CIRCUNFERÊNCIAS

Considere que tenhamos uma circunferência qualquer um ponto P externo a ela.

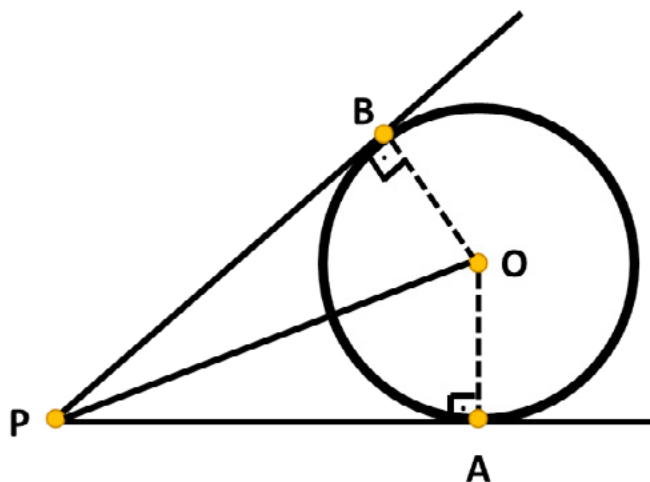


Uma propriedade interessante é que, quando duas tangentes à circunferência se encontram em um ponto **P externo** a ela, os segmentos tangentes PA e PB **possuem o mesmo comprimento**.



$$PA = PB$$

A explicação para essa propriedade requer o conhecimento de semelhança de triângulos. Podemos traçar o segmento OP e notar que os triângulos OBP e OAP são um caso de congruência LAL.

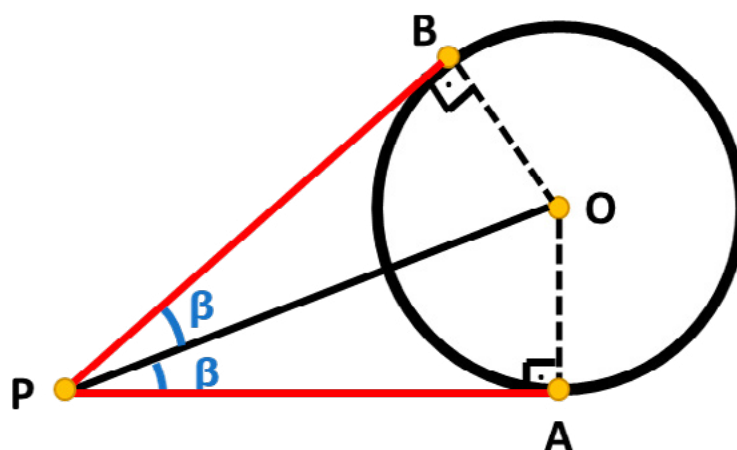


Os triângulos OAP e OBP são congruentes, porque possuem ambos um ângulo reto e dois lados iguais:

- **L:** os lados $OB = OA = R$, que são iguais ao raio da circunferência;
- **A:** ambos os triângulos OAP e OBP possuem um ângulo reto;
- **L:** o lado OP é comum aos dois triângulos.

Como possuem dois lados e um ângulo iguais, eles são triângulos congruentes. Assim, podemos concluir que:

- As medidas PA e PB são iguais;
- O segmento OP é bissetriz do ângulo ABP.

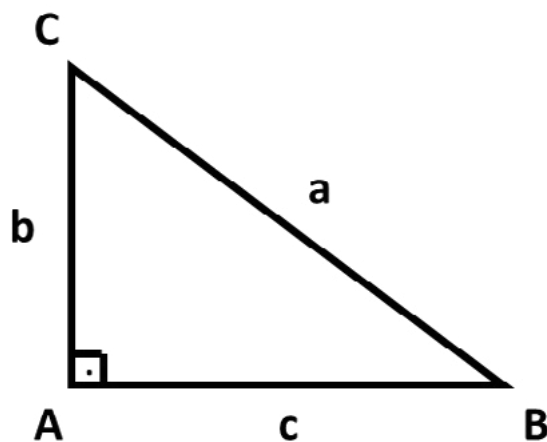


2. TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Um triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto (90°). Esse nome deriva do fato de que eles podem ser obtidos a partir de cortes em um retângulo.

Nesse tipo de triângulo, os lados recebem denominações específicas:

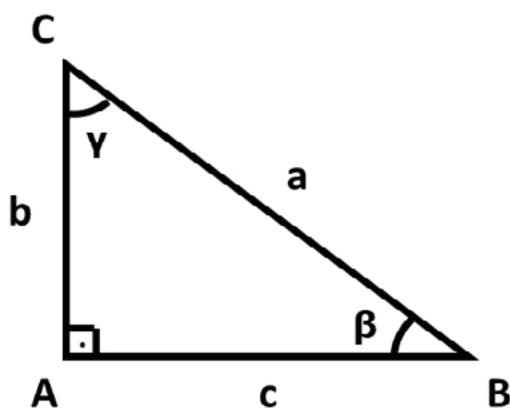
- **hipotenusa (a):** é o maior lado, sempre oposto ao ângulo reto;
- **catetos (b e c):** são os dois lados que formam o ângulo de 90°.



Perceba que, no triângulo retângulo, um cateto é a altura relativa em relação ao outro. Por isso, a sua área pode ser expressa simplesmente pela metade do produto dos catetos.

$$S = \frac{bc}{2}$$

Os ângulos internos nos vértices dos catetos são ditos **complementares**, porque a soma deles é sempre igual a 90°. A razão para isso é que, como visto anteriormente, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° e um dos ângulos no vértice A é o ângulo reto, de 90°. Então, temos:

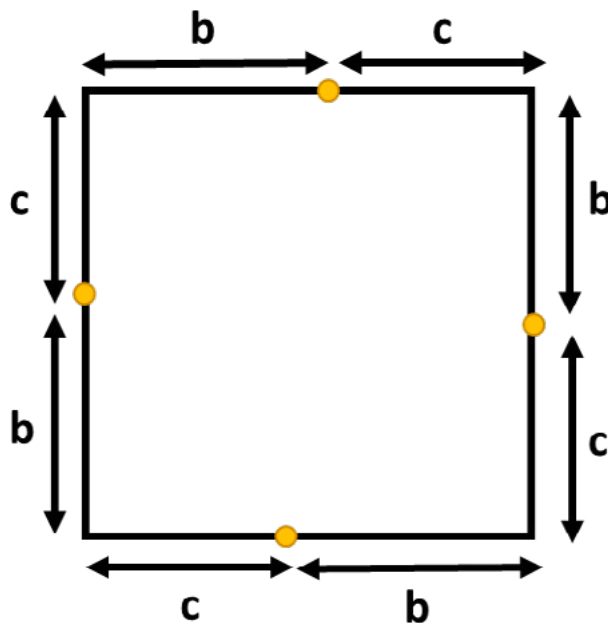


$$90^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ$$

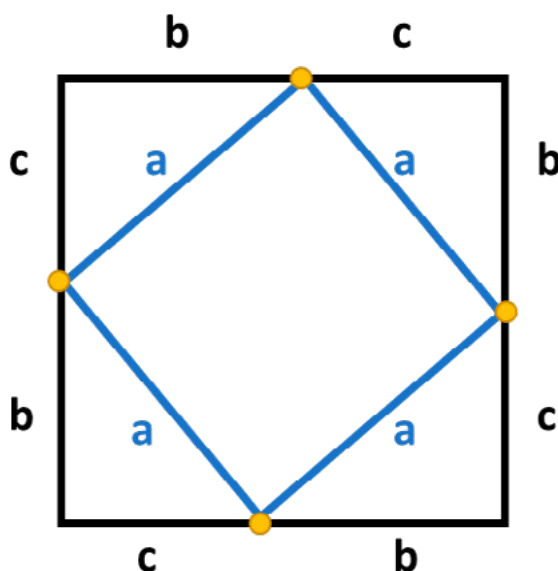
$$\therefore \beta + \gamma = 90^\circ$$

Uma relação métrica muito importante é o Teorema de Pitágoras, que estabelece que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Uma demonstração simples do Teorema de Pitágoras é traçando um quadrado de lado $(b + c)$ e marcar nele alguns pontos convenientes:



Observe que, ligando os pontos destacados acima, podemos construir quatro triângulos retângulos. Todos eles terão a mesma hipotenusa a .



A área de um quadrado é igual ao lado ao quadrado. Desse modo, o lado do quadrado grande é igual a $(b + c)^2$. Mas, essa área pode ser expressa também como a soma da área

do quadrado menor, de lado a , com a área dos quatro triângulos retângulos pequenos de lados a , b e c . Assim, podemos escrever:

$$(b + c)^2 = a^2 + 4S$$

Os quatro triângulos são congruentes, ou seja, possuem exatamente os mesmos lados e ângulos. Portanto, suas áreas são iguais.

A área de um triângulo retângulo pode ser obtida como a metade do produto dos catetos. Assim, temos:

$$S = \frac{bc}{2}$$

Podemos substituir essa informação na relação obtida anteriormente:

$$(b + c)^2 = a^2 + 4S$$

$$(b + c)^2 = a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2}$$

Utilizando o produto notável do quadrado da soma, temos:

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + \frac{4bc}{2}$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

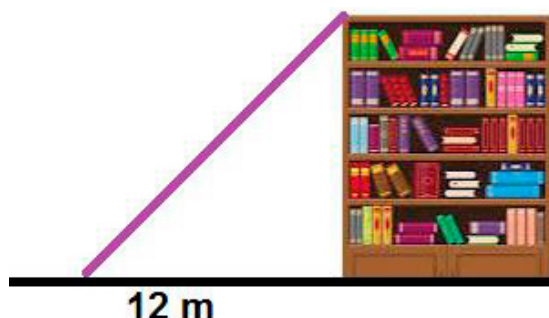
Cortando o produto $2bc$ de ambos os lados da equação, temos:

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

DIRETO DO CONCURSO



003. (FUNDATEC/PREFEITURA DE PARAÍ/AUXILIAR EDUCACIONAL/2024) Uma escada de 13 metros de comprimento deve ser posicionada em uma estante de livros, conforme a figura abaixo:

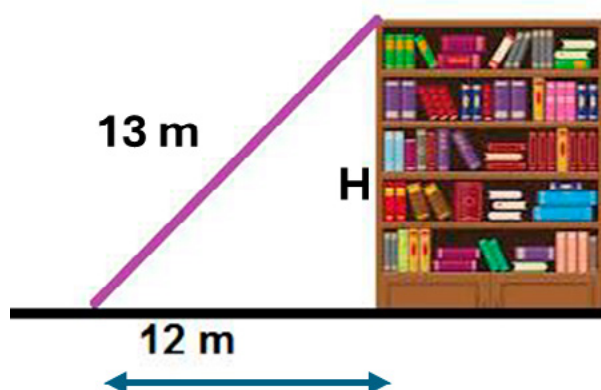


Sendo assim, qual é a altura da estante, em metros?

- a) 2.
- b) 4.
- c) 5.
- d) 7.
- e) 9.



Observe que a escada forma um triângulo retângulo com a estante.



Então, podemos escrever pelo Teorema de Pitágoras:

$$13^2 = 12^2 + H^2$$

$$169 = 144 + H^2$$

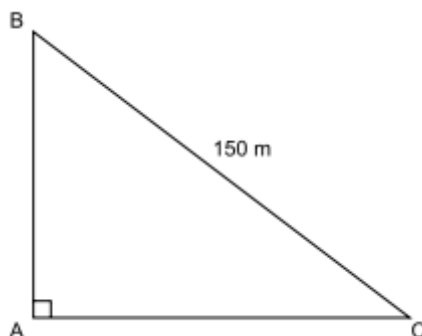
$$\therefore H^2 = 169 - 144 = 25$$

Por fim, podemos tirar a raiz quadrada.

$$H = \sqrt{25} = 5$$

Letra c.

004. (VUNESP/PREFEITURA DE CANANÉIA/SP/ORIENTADOR SOCIAL/2020) Uma praça, com a forma do triângulo retângulo ABC mostrado na figura, tem uma pista para caminhadas em toda a extensão do seu perímetro. Para caminhar do ponto B até o ponto C, pode-se optar por ir diretamente de B até C, caminhando 150 m, conforme indicado na figura, ou ir do ponto B até o ponto A, caminhando x m, e do ponto A até o ponto C, caminhando mais 120 m.



O trajeto de B até C, passando por A, é mais longo do que o trajeto direto de B até C em

- a) 70 m.
- b) 60 m.
- c) 50 m.
- d) 40 m.
- e) 30 m.



Precisamos descobrir qual o valor do outro cateto. Para isso, basta utilizar a fórmula de Pitágoras:

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2$$

$$150^2 = 120^2 + x^2 \rightarrow 22500 = 120^2 + x^2$$

$$22500 = 14400 + x^2$$

$$x^2 = 8100 \rightarrow x = \sqrt{8100}$$

$$\therefore x = 90m$$

Somando o percurso mais longo:

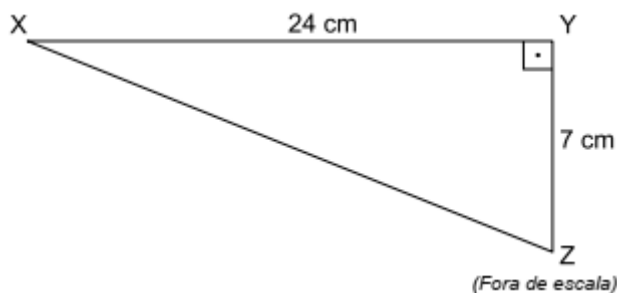
$$BA + AC = 90 + 120 = 210m$$

Como o trajeto mais curto é 150 m, a diferença é de:

$$\text{diferença} = 210 - 150 = 60m$$

Letra b.

005. (VUNESP/CÂMARA DA ESTÂNCIA BALNEÁRIA DE ITANHAÉM/SP/AGENTE DE MANUTENÇÃO E ZELADORIA/2017) Arthur desenhou numa folha de papel o triângulo retângulo a seguir. Ele afirmou, corretamente, que a medida do segmento XY mais a medida do segmento YZ é igual à medida segmento XZ mais _____ cm.



Das alternativas a seguir, aquela que completa corretamente a afirmação de Arthur é:

- a) 6
- b) 5
- c) 4
- d) 3
- e) 2



Primeiramente, vamos descobrir qual o valor da hipotenusa. Para isso, basta utilizar a fórmula de Pitágoras:

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2$$

$$x^2 = 24^2 + 7^2 \rightarrow x^2 = 576 + 7^2$$

$$x^2 = 576 + 49$$

$$x^2 = 625 \rightarrow x = \sqrt{625}$$

$$\therefore x = 25m$$

Somando os catetos:

$$XY + YZ = 24 + 7 = 31m$$

Como a hipotenusa é 25 m, a diferença é de:

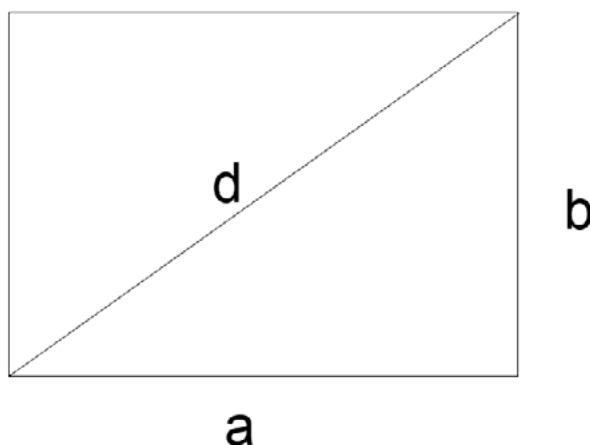
$$\text{diferença} = 31 - 25 = 6m$$

Letra a.

2.1. APLICAÇÕES EM QUADRILÁTEROS

2.1.1. DIAGONAIS DO QUADRADO E DO RETÂNGULO

As diagonais do quadrado e do retângulo podem ser calculadas pelo Teorema de Pitágoras diretamente a partir dos lados.

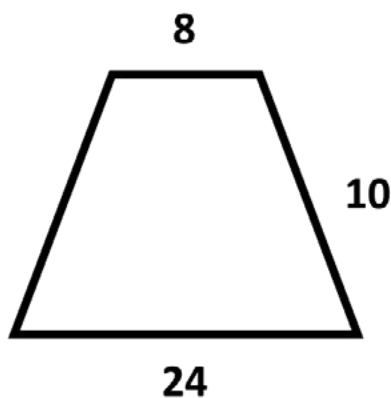


$$d^2 = a^2 + b^2 \therefore d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

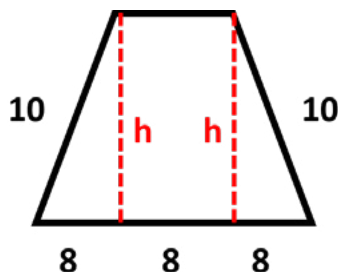
Tomemos como exemplo um retângulo, cujo comprimento seja igual a 5 cm e cuja largura seja igual a 12 cm. Qual a área e a diagonal desse retângulo?

2.1.2. ALTURA DO TRAPÉZIO E DO PARALELOGRAMO

A altura de um trapézio não-retângulo ou de paralelogramo podem ser calculadas usando o Teorema de Pitágoras. Por exemplo, qual a área do seguinte trapézio isósceles, cujas dimensões são dadas em cm?



A forma mais simples de calcular a altura desse trapézio é construindo as suas alturas, que são segmentos que unem as duas bases, de forma perpendicular a elas. A altura definirá dois triângulos retângulos congruentes:



Pelo Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$10^2 = 8^2 + h^2$$

$$100 = 64 + h^2$$

$$\therefore h^2 = 100 - 64 = 36$$

$$\therefore h = \sqrt{36} = 6$$

Desse modo, a altura do trapézio é igual a 6 cm. Então, podemos calcular a sua área pela expressão:

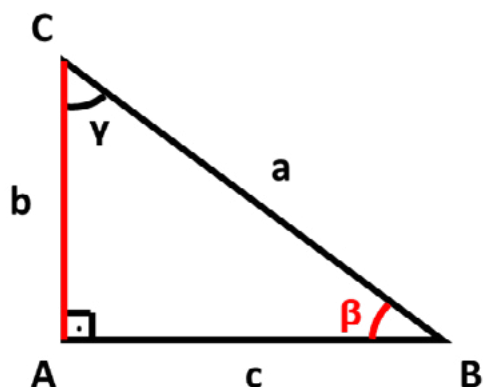
$$S = \left(\frac{B + b}{2} \right) \cdot h = \left(\frac{24 + 8}{2} \right) \cdot 6 = \frac{32}{2} \cdot 6 = 96 \text{ cm}^2$$

2.2. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Em um triângulo retângulo, são definidas as importantes relações:

- **Seno:** razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa do triângulo;
- **Cosseno:** razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa do triângulo.

Vamos observar um triângulo retângulo e as definições.



$$\text{sen } \beta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \beta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tan } \beta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

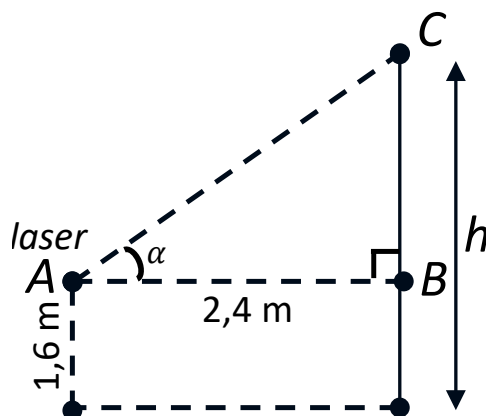
Os senos e cossenos dos diversos ângulos são tabelados e serão fornecidos na hora da prova, quando necessário. Vejamos um exemplo de situação em que isso aconteceu.

DIRETO DO CONCURSO

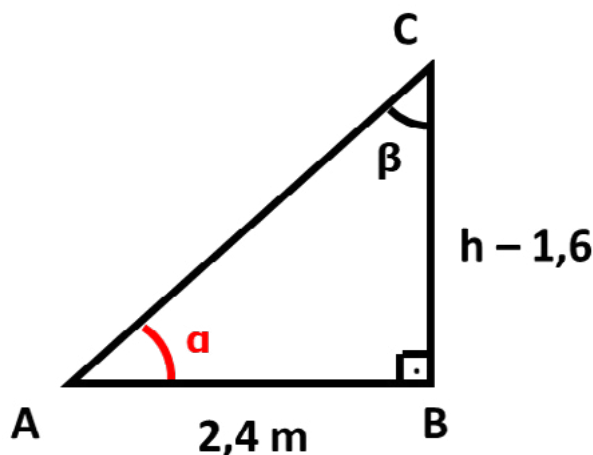


006. (CESPE/PREFEITURA DE SÃO CRISTÓVÃO/SE/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2019) A respeito da trigonometria do triângulo retângulo e das funções trigonométricas, julgue os itens que se seguem.

Situação hipotética: Um poste vertical mede h m de altura. A extremidade superior do poste, ponto C , é atingida por um laser localizado em um ponto A , a 2,4 m do poste e a 1,6 m do solo. Considerando o ponto B sobre o poste de forma que o triângulo ABC seja retângulo em B , o ângulo $\alpha = \angle CAB$ é tal que $\operatorname{tg} \alpha = 17/12$. A figura a seguir ilustra a situação apresentada. Assertiva: Nesse caso, o poste mede mais de 6 m de altura.



Note que a altura do triângulo ABC é $h - 1,6$ m. Além disso, foi fornecido o comprimento do cateto adjacente ao ângulo alfa.



Então, podemos utilizar a tangente desse ângulo.

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\tan \alpha = \frac{17}{12} = \frac{h - 1,6}{2,4}$$

Aplicando o meio pelos extremos, temos:

$$17 \cdot 2,4 = 12 \cdot (h - 1,6)$$

$$40,8 = 12h - 12 \cdot 1,6$$

$$40,8 = 12h - 19,2$$

$$\therefore 12h = 40,8 + 19,2 = 60$$

$$\therefore h = \frac{60}{12} = 5 \text{ m}$$

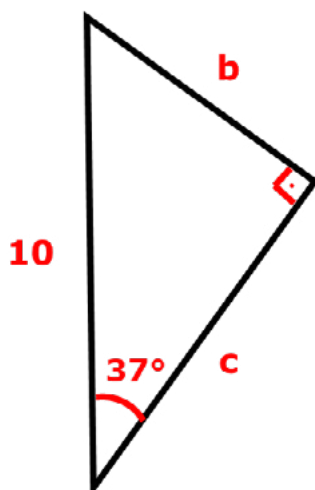
Como o poste mede mais que 6m de altura, a afirmação está errada.

Errado.

007. (INÉDITA/2017) Alexandre pode ir da cidade A até a cidade B por dois caminhos. O caminho direto é uma estrada que mede 10 km com muitos obstáculos, na qual a velocidade média é de 40 km/h. O caminho alternativo é composto por duas vias perpendiculares entre si passando por uma cidade C. Sabe-se que o ângulo entre as estradas AB e AC é de 37° e que $\sin 37^\circ = 0,6$. A velocidade mínima que Alexandre deve utilizar nesse caminho para que esse caminho alternativo seja mais rápido que o caminho direto é de 48 km/h.



Esquemmatizando:



No caso, note que foi fornecido que $\text{sen } 37^\circ = 0,6$ e por essa informação encontraremos a medida do cateto c :

$$\text{sen } 37^\circ = 0,6 = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{c}{10} = 0,6 \therefore c = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ km}$$

Agora, basta aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida do outro cateto:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$10^2 = b^2 + 6^2 \therefore b^2 = 100 - 36 \therefore b^2 = 64$$

$$b = \sqrt{64} = 8 \text{ km}$$

O comprimento do caminho alternativo é dado pela soma dos dois catetos do triângulo:

$$L_{\text{altern}} = b + c = 8 + 6 = 14 \text{ km}$$

Note que o caminho alternativo é mais longo e como ele precisa ser percorrido no mesmo espaço de tempo que o caminho $\overline{AB}$, a velocidade precisa ser maior que 40 km/h, portanto são diretamente proporcionais. Temos:

$$\frac{40 \text{ km/h}}{x} = \frac{10 \text{ km}}{14 \text{ km}}$$

$$x = \frac{40 \cdot 14}{10} = \frac{560}{10} = 56 \text{ km/h}$$

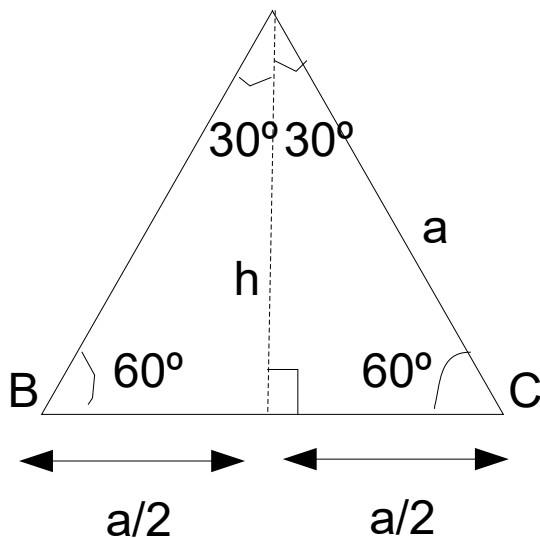
Errado.

2.2.1. SENO E COSSENO DOS ÂNGULOS NOTÁVEIS

Na Geometria Plana, os ângulos mais comuns sobre os quais se pede o seno e o cosseno são os ângulos de 30° , 45° e 60° .

Esses valores podem ser calculados facilmente a partir de um triângulo equilátero ou um quadrado.

No caso do triângulo equilátero, podemos traçar o segmento que divide um dos lados ao meio, teremos o seguinte:



A altura pode ser calculada pelo Teorema de Pitágoras.

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\therefore h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\therefore h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Voltemos às definições de seno e cosseno utilizadas na Geometria Plana.

- **Seno:** razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa do triângulo;
- **Cosseno:** razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa do triângulo.

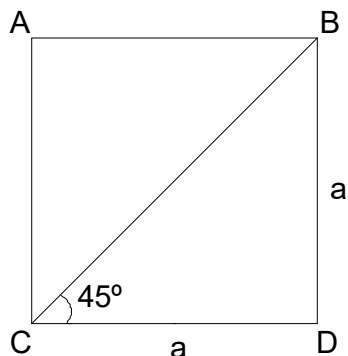
$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{a} = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{a} = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

Para o ângulo de 45° , os valores de seno e cosseno podem ser calculados a partir do quadrado. Devido à simetria da figura geométrica, a diagonal do quadrado também é bissetriz do ângulo de 90° .



A diagonal pode também ser calculada pelo Teorema de Pitágoras.

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \therefore d = a\sqrt{2}$$

Então, agora podemos calcular o seno e o cosseno do ângulo de 45° pelas definições.

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

É mais fácil guardar os senos e cossenos dos ângulos de 30° , 45° e 60° memorizando a seguinte tabela e a forma como ela é feita. Primeiramente, escrevemos os ângulos na base da tabela.

30° 45° 60°

Seno

Cosseno

Tangente

Agora, escrevemos 1-2-3 no seno e 3-2-1 no cosseno.

30° 45° 60°

Seno 1 2 3

Cosseno 3 2 1

Tangente

Agora, tiramos a raiz.

	30°	45°	60°
Seno	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
Cosseno	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1
Tangente			

Agora, dividimos tudo por dois.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente			

Por fim, a tangente corresponde à razão entre seno e cosseno. Ela é definida como:

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$$

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

DIRETO DO CONCURSO 

008. (VUNESP/UNESP/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2017) O quadrado da altura de um triângulo equilátero é exatamente 300. O perímetro desse triângulo, em uma determinada unidade de medida, é:

- a) 60
- b) 50
- c) 30
- d) 20
- e) 10



Como a questão pede o perímetro de um triângulo equilátero, a primeira coisa a se fazer é descobrir quanto mede cada lado. A partir das informações fornecidas, temos:

$$h^2 = 300$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (altura do triângulo equilátero)}$$

Substituindo a relação I em II, temos:

$$300 = \frac{a^2(\sqrt{3})^2}{2^2}$$

$$300.4 = 3a^2 \therefore a^2 = \frac{300.4}{3} = 400 \therefore a = \sqrt{400} = 20$$

Como o perímetro é a soma dos lados do triângulo, temos:

$$2p = 3a$$

$$2p = 3.20 = 60$$

Letra a.

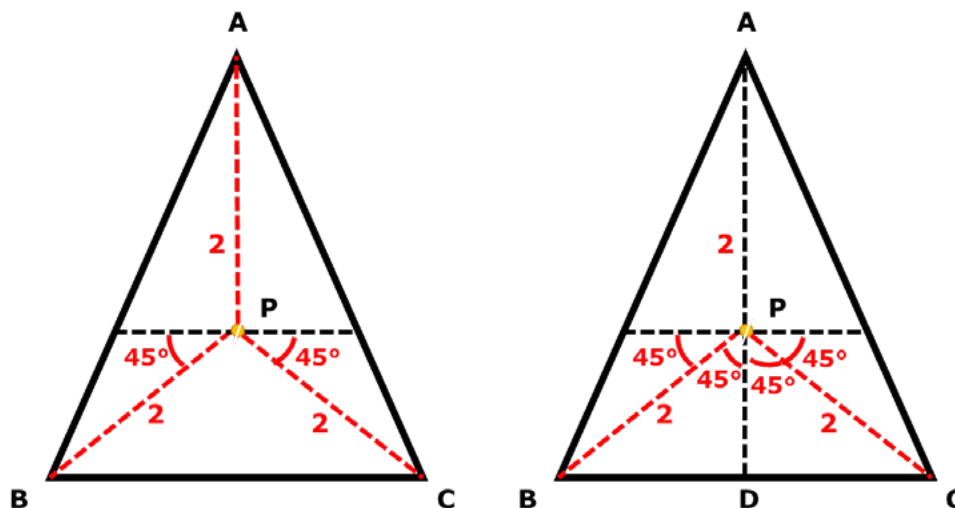
009. (CESPE/MEC/GUARDA MUNICIPAL/2011) Três crianças costumam brincar de caça ao tesouro, em local plano, na praia, da forma descrita a seguir: de posse de uma bússola, elas fixam um ponto P na praia com uma bandeirinha, uma delas esconde um brinquedo sob a areia e, depois, passa o mapa e a bússola para que as outras duas tentem encontrar o tesouro. O mapa consiste em uma sequência de instruções formadas pelo número de passos em linha reta e um sentido — a partir da bandeirinha —, que deve ser observada para se encontrar o tesouro.

A partir do texto acima e considerando que a medida do passo de todas as crianças seja idêntica e que as instruções do mapa sejam seguidas na ordem apresentada, julgue os itens seguintes.

Se as crianças se unirem no ponto P e a primeira caminhar 2 passos para o norte, a segunda, 2 passos para o sudoeste e a terceira, 2 passos para o sudeste, o triângulo cujos vértices corresponderão às posições finais das crianças será equilátero.



Seguindo as instruções dadas no enunciado, considerando a direção sudoeste como a direção intermediária do quadrante sul/oeste e a direção sudeste como a direção intermediária do quadrante sul/leste (45° em relação aos eixos do quadrante), temos:



Dessa forma, ao analisar o triângulo PBC, é possível constatar que se trata de um triângulo retângulo e então vamos calcular a hipotenusa:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

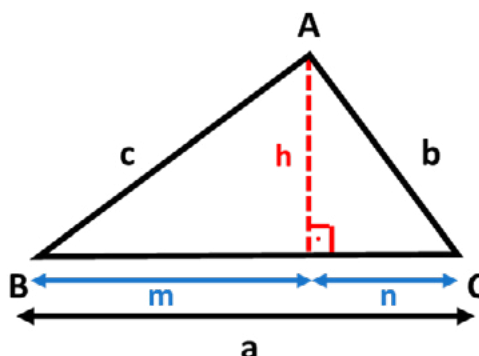
$$a^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \therefore a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Na análise dos demais triângulos, foi constatado que os triângulos APB e APC são iguais, no entanto apresentam um ângulo maior que 90° e só por isso o lado correspondente já seria maior que $2\sqrt{2}$.

Errado.

2.3. ALTURA RELATIVA À HIPOTENUSA

Esse tipo de problema é mais comum com o triângulo deitado sobre a hipotenusa.



Na figura acima, estão definidas:

- **h**: a altura relativa à hipotenusa, isto é, o segmento perpendicular a ela partindo do vértice oposto;
- **m**: é a projeção do cateto **c** sobre a hipotenusa;
- **n**: é a projeção do cateto **b** sobre a hipotenusa.

A área do triângulo retângulo pode ser sempre expressão como o produto da base pela altura. Assim, do ponto de vista da hipotenusa, a área do triângulo retângulo pode ser como o produto da hipotenusa pela altura relativa a ela dividido por 2:

$$S = \frac{ah}{2}$$

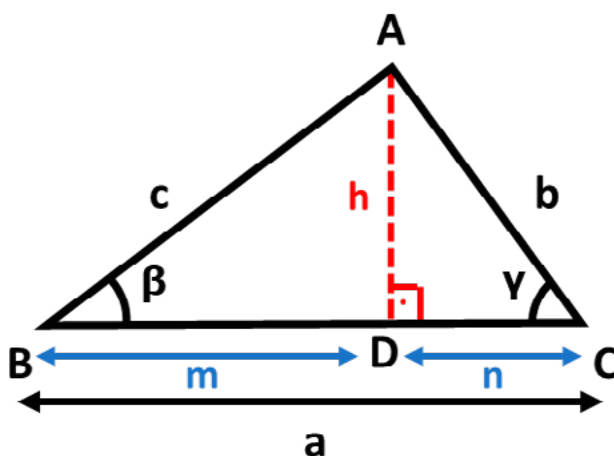
Por outro lado, já sabíamos expressar essa área em termos dos catetos. Sendo assim, temos:

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{bc}{2}$$

$$\therefore ah = bc$$

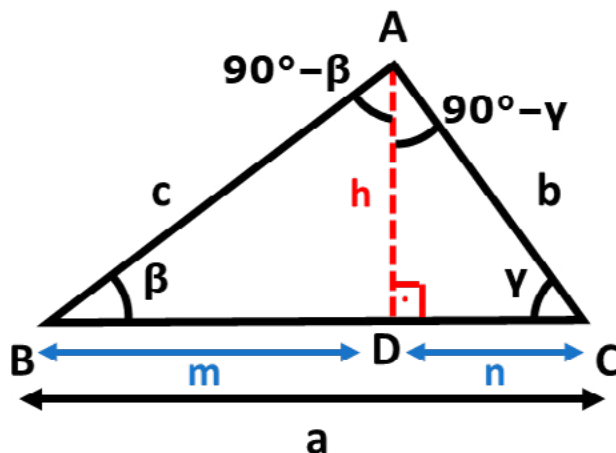
A altura relativa à hipotenusa também define duas projeções da hipotenusa sobre cada um dos catetos. São as projeções m e n.

Para calcular as projeções relativas à hipotenusa, precisamos demonstrar que os dois triângulos criados pela altura são semelhantes ao triângulo principal. Para isso, vamos definir o ponto D como o pé da altura do vértice A sobre a hipotenusa e os ângulos nos vértices B e C como β e γ , respectivamente.



Como os ângulos β e γ são os ângulos internos de um triângulo retângulo, eles são complementares, isto é, a soma deles é igual a 90° . Além disso, os triângulos ADB e ADC são também retângulos, portanto, o outro ângulo interno deve ser complementar. Assim,

o ângulo DAB é complementar ao ângulo ADB, que mede β , e o ângulo DAC é complementar ao ângulo DCA, que mede γ .



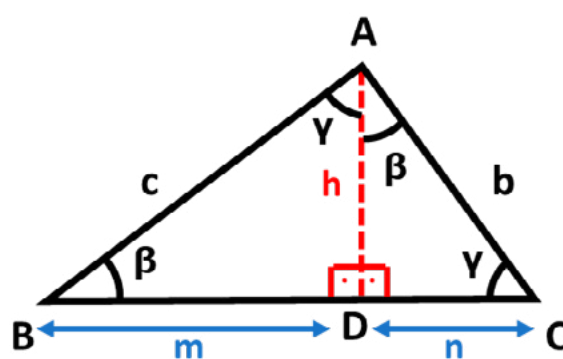
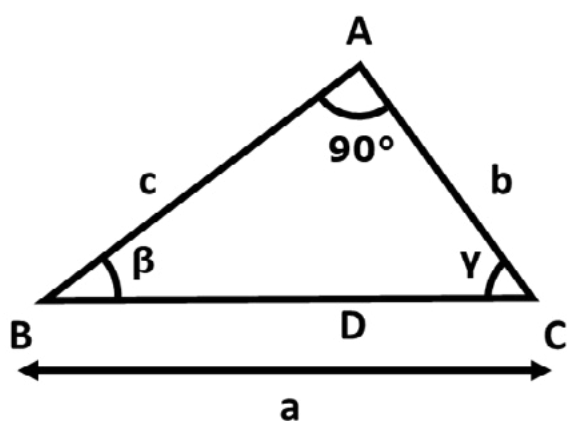
Porém, como β e γ são complementares, podemos escrever:

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$

$$\therefore \gamma = 90^\circ - \beta$$

$$\therefore \beta = 90^\circ - \gamma$$

Assim, concluímos que os triângulos ABC, ABD e ACD são todos semelhantes entre si, pois eles têm os mesmos ângulos.



Assim, podemos utilizar a relação de semelhança. Devemos montar as frações com os lados opostos aos mesmos ângulos. Por exemplo, em oposição ao ângulo β , temos o lado **b** no triângulo ABC e o lado **n** no triângulo ADC. Já em oposição ao ângulo de 90° , temos o lado **a** no triângulo ABC e o lado **h** no triângulo ADC. Então, podemos escrever:

$$\frac{b}{n} = \frac{a}{b}$$

Fazendo o meio pelos extremos, temos:

$$\therefore b^2 = an$$

Podemos, então, extrair, a projeção n :

$$\therefore n = \frac{b^2}{a}$$

Portanto, a projeção do cateto b sobre a hipotenusa pode ser calculada como o quadrado desse cateto dividido pela hipotenusa.

De forma similar, podemos calcular a outra projeção. Em oposição ao ângulo γ , temos o lado c no triângulo ABC e o lado m no triângulo ADB . Já em oposição ao ângulo de 90° , temos o lado do triângulo ABC e o lado c no triângulo ADB . Assim, podemos escrever:

$$\frac{c}{m} = \frac{a}{c}$$

Fazendo o meio pelos extremos, temos:

$$\therefore c^2 = am$$

Podemos, então, extrair, a projeção m :

$$\therefore m = \frac{c^2}{a}$$

Então, a projeção do cateto c sobre a hipotenusa também é igual ao quadrado desse cateto dividido pela hipotenusa.

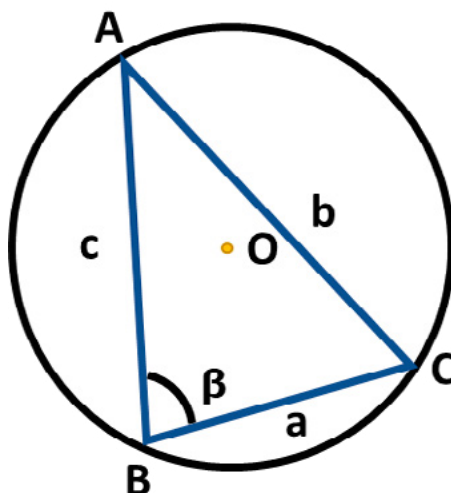
Podemos, assim, estabelecer a equação:

$$\text{projeção do cateto sobre a hipotenusa} = \frac{\text{cateto}^2}{\text{hipotenusa}}$$

3. TRIÂNGULOS E CIRCUNFERÊNCIAS

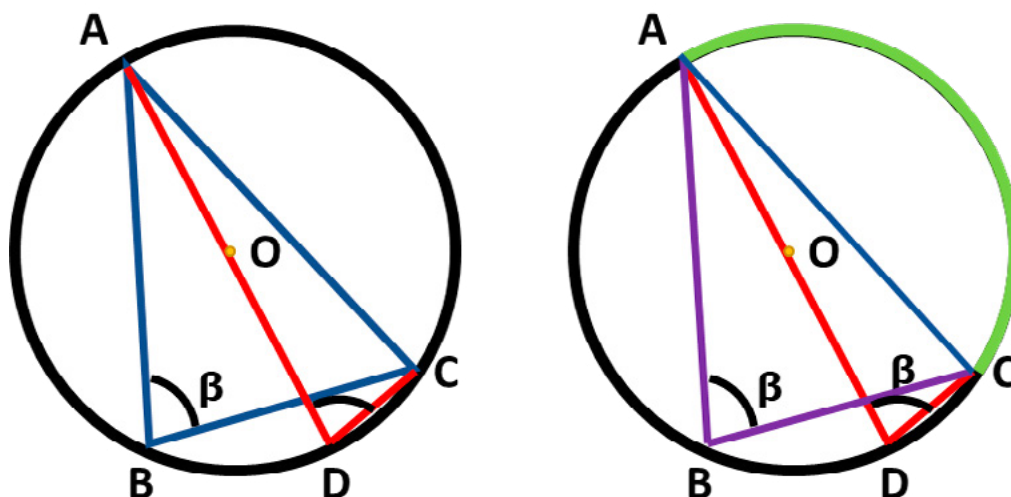
3.1. CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA

A circunferência circunscrita ao triângulo é tal que todos os vértices do triângulo são pontos da circunferência. Em contrapartida, diz-se que o triângulo está **inscrito** nessa circunferência.



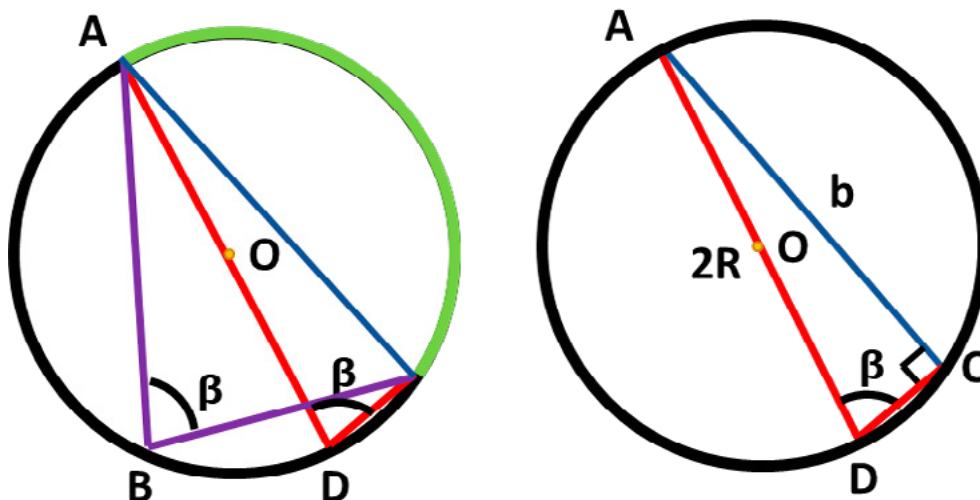
Perceba que as palavras circunscrita e inscrita são inversas. Se a circunferência está circunscrita ao triângulo, é porque o triângulo está inscrito na circunferência. E vice-versa.

Podemos obter uma importante relação entre os lados do triângulo e seus ângulos traçando-se as diagonais passando por cada um dos vértices. Por exemplo, para o vértice A:



Perceba que os ângulos BAC e ADC estão inscritos no mesmo arco AC. Sendo assim, eles são iguais.

Além disso, o ângulo ACD está inscrito em metade da circunferência, que corresponde ao ângulo de 180° . Desse modo, o ângulo ACD metade a metade desse arco, no caso, 90° . Logo, o triângulo ACD é retângulo.



Portanto, podemos calcular o seno do ângulo β no triângulo ACD:

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{AD}$$

Observe que a hipotenusa do triângulo ACD corresponde ao diâmetro da circunferência, então podemos escrever:

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{2R} \therefore \frac{b}{\text{sen } \beta} = 2R$$

Assim, podemos concluir que a relação entre o lado **b** e o seno do ângulo oposto a esse lado (β) é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita.

Fazendo o mesmo procedimento com os vértices, podemos ter uma importante relação conhecida como **Lei dos Senos**:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R$$

Desse modo, a razão entre um lado qualquer de um triângulo e o seno do ângulo oposto a ele é constante e igual ao diâmetro da circunferência circunscrita.

Essa relação pode ser muito útil tanto para calcular o raio da circunferência como a relação entre os lados.

3.2. CASOS PARTICULARES

Embora a Lei dos Senos traga um resultado de fácil utilização, em questões de prova, é muito mais comum serem cobradas as circunferências circunscritas a triângulos retângulos e a triângulos equiláteros.

O caso mais simples é o triângulo retângulo, pois a hipotenusa é igual ao próprio diâmetro da circunferência circunscrita.

$$a = 2R \therefore R = \frac{a}{2}$$

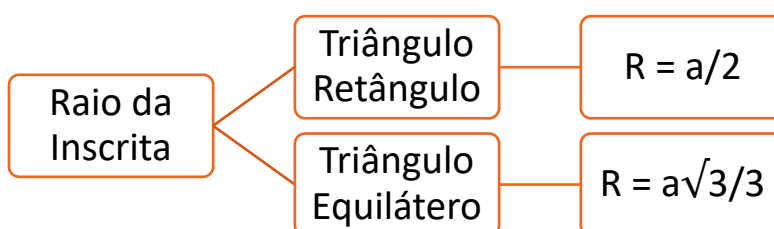
Por outro lado, no triângulo equilátero, podemos aplicar a Lei dos Senos para calcular o raio da circunscrita:

$$2R = \frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore 2R = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Vamos anotar, portanto, esses dois resultados:



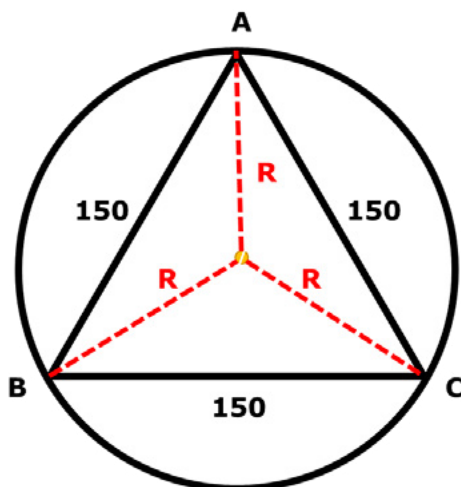
DIRETO DO CONCURSO

010. (CESPE/PC/ES/PERITO CRIMINAL/2011) Suponha, também que as estações A, B e C tenham sido construídas em pontos equidistantes, de modo que a distância de uma dessas três estações para a outra seja de 150 km.

Com referência às informações contidas no texto acima e à considerações hipotéticas que a ele se seguem, e considerando 1,73 como valor aproximado para $\sqrt{3}$, julgue o item a seguir: Supondo que uma nova estação, D, seja instalada em um ponto equidistante das estações A, B e C, então a distância da estação D para as estações A, B e C será inferior a 87 km.



Observe que a questão é clara quando diz que as estações A, B e C são equidistantes, ou seja, as estações são vértices de um triângulo equilátero.



Perceba que a estação D é equidistante dos vértices A, B e C, logo podemos afirmar que o ponto D é o próprio centro da circunferência e sua distância em relação às demais estações corresponde ao próprio raio da circunferência em que o triângulo está inscrito. Utilizando a Lei dos Senos, temos:

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Como o triângulo é equilátero, sabemos que cada um dos seus ângulos internos corresponde a 60° e encontraremos o R:

$$2R = \frac{150}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$

$$\therefore 2R = \frac{150}{\sqrt{3}/2}$$

$$\therefore R = \frac{150}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{150}{\sqrt{3}} = \frac{150}{1,73} = 86,7 \text{ km}$$

Portanto, a distância entre a estação D e as estações A, B e C é de 86,7 km, ou seja, é menor que 87 km.

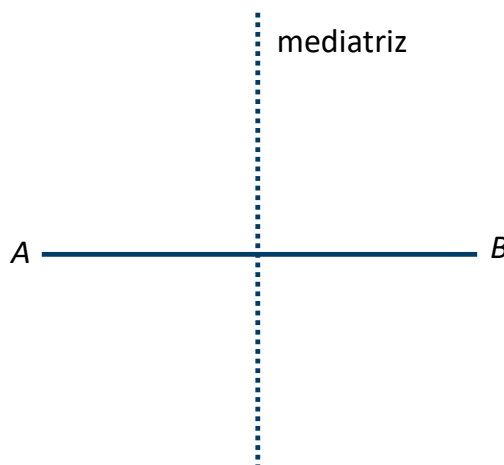
Certo.

3.3. DEMONSTRAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA

Optamos por fazer essa demonstração em uma seção separada, porque é pouco provável que os conceitos aqui aprendidos venham a ser objeto de questões de prova. Porém, caso você consiga aprendê-los, isso aumentará bastante o seu conhecimento de Geometria.

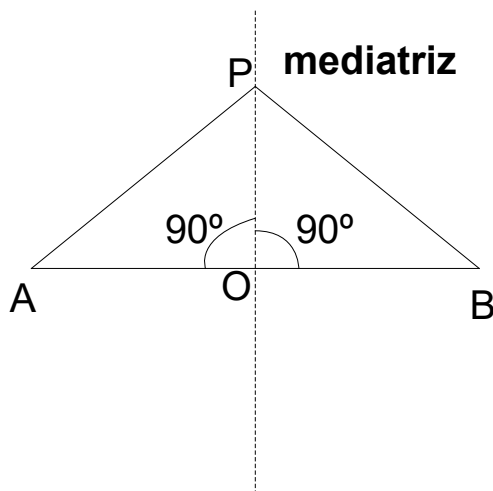
É possível demonstrar que todo triângulo tem uma circunferência circunscrita partindo do conceito de mediatrizes.

A mediatriz do segmento AB é uma reta perpendicular a esse segmento que passa pelo seu ponto médio.



A propriedade da reta mediatriz é que ela é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e B. Ou seja, para qualquer ponto P pertencente à mediatriz, temos que $PA = PB$.

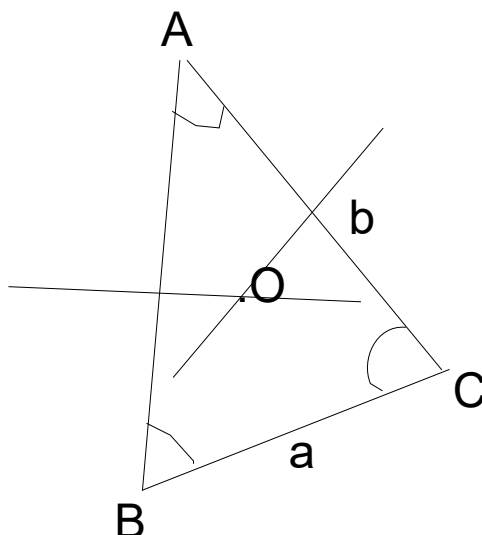
Para demonstrar isso, basta traçar os triângulos:



Os triângulos PAO e PBO são congruentes, porque possuem dois lados iguais (PO é comum aos dois e $OA = OB$, já que O é o ponto médio de AB). Além disso, eles possuem um ângulo em comum, que é o ângulo reto. Os dois ângulos em torno de O são retos. Trata-se de uma congruência LAL.

Se os dois triângulos são congruentes, os lados PA e PB também devem ser iguais. Portanto, mostramos que qualquer ponto da mediatriz se situa à igual distância dos dois pontos A e B.

Agora, vamos a um triângulo qualquer ABC. Podemos traçar as mediatrizes dos lados AB e AC. Como elas não são paralelas, vão se encontrar em algum ponto O.



O ponto O pertence à mediatriz de AB, portanto $OA = OB$. Além disso, o ponto O pertence à mediatriz de AC, portanto $OA = OC$.

Dessa maneira, concluímos que $OB = OC$, logo O também pertence à mediatriz do segmento BC.

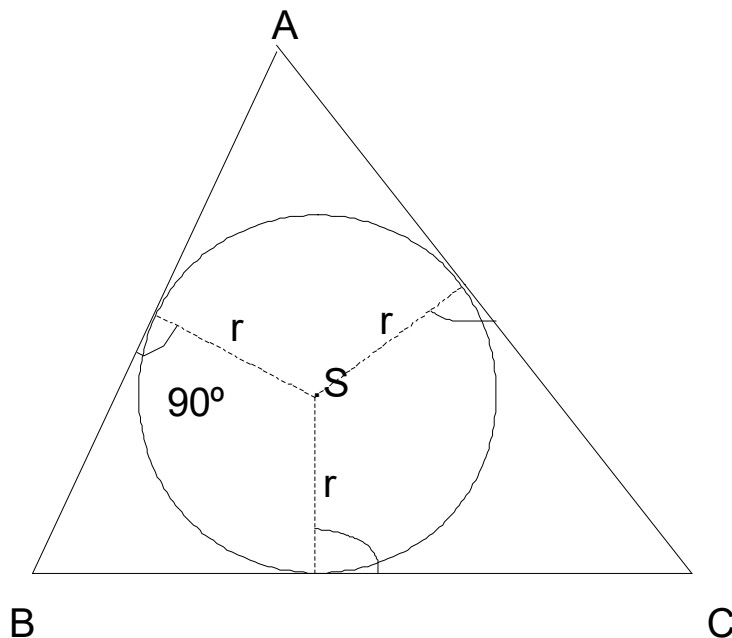
Sendo assim, O é o ponto de encontro das três mediatrizes do triângulo e é denominado **circuncentro**.

O tem a propriedade de que $OA = OB = OC$. Essa distância pode ser chamada genericamente de raio da circunferência circunscrita.

Adicionalmente, podemos concluir que todo triângulo tem um circuncentro que é o centro da circunferência circunscrita.

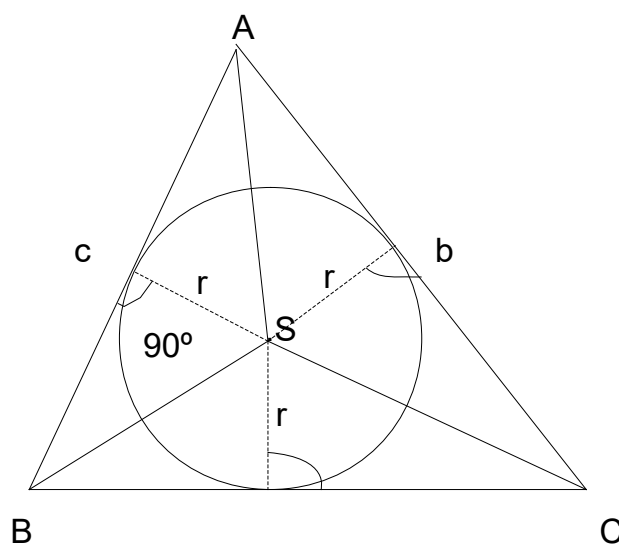
3.4. CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA

A circunferência inscrita no triângulo é aquela que é tangente aos três lados do triângulo:



Em outras palavras, o centro dessa circunferência dista igualmente dos três lados do triângulo.

O ponto S é denominado **incentro** e corresponde ao centro da inscrita. O modo mais fácil de se calcular o raio da inscrita é tomando a área dos três triângulos definidos ABS, ACS e BCS.



Note que os triângulos ABS, ACS e BCS possuem a altura referente ao vértice S exatamente igual ao raio da inscrita. Portanto, a área do triângulo ABC pode ser escrita como:

$$S = S_{ABS} + S_{ACS} + S_{BCS} = \frac{cr}{2} + \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} = \frac{a+b+c}{2}r$$

$$\therefore S = pr$$

Na expressão anterior, p significa o semiperímetro do triângulo ABC, ou seja, a soma dos lados dividida por 2.

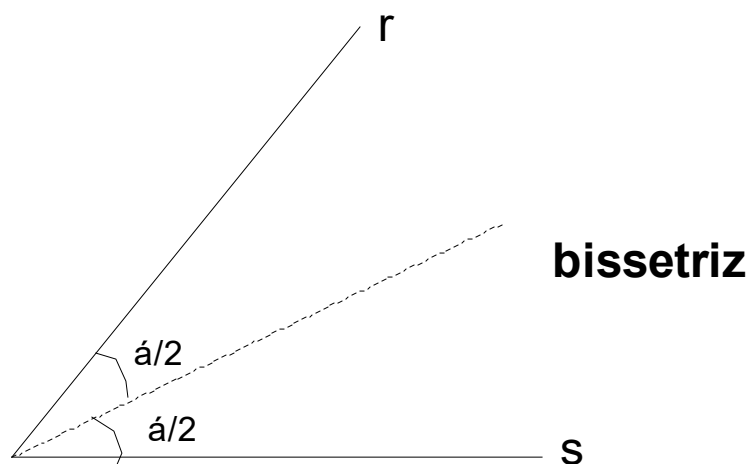
É interessante observar que a área igual ao semiperímetro vezes o raio da inscrita é uma relação válida para **qualquer polígono**.

Além disso, essa relação é muito útil para calcular o raio da inscrita, pois a área pode ser obtida de outras formas, por exemplo, base vezes altura dividida por 2. De posse da área do triângulo, podemos calcular o raio da inscrita facilmente graças a essa relação.

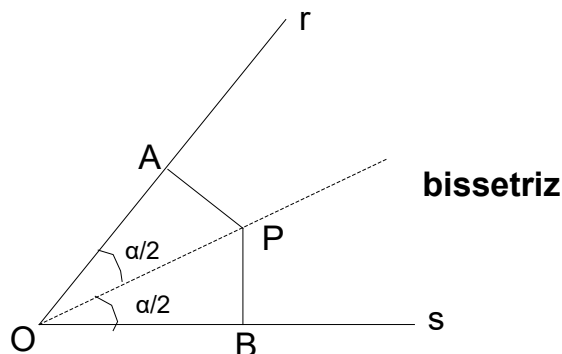
3.5. DEMONSTRAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA

É possível demonstrar que todo triângulo tem uma circunferência inscrita. Para isso, precisaremos do conceito de bissetriz.

Seja um ângulo formado por duas retas r e s. A bissetriz desse ângulo é uma reta que divide o ângulo em duas partes iguais.



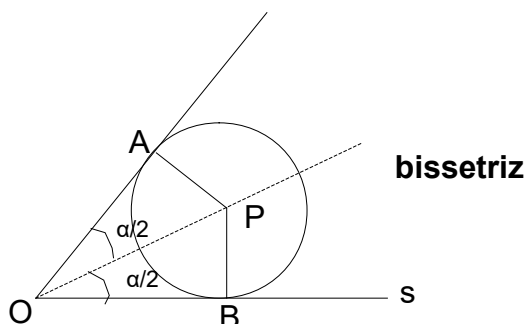
Todos os pontos da bissetriz têm a propriedade de que são equidistantes das retas r e s . Por exemplo, considere um ponto P genérico:



Podemos provar que as distâncias de P às retas r e s são iguais construindo os dois segmentos PA e PB , que são perpendiculares, respectivamente, a r e s .

Os triângulos OPA e OPB são congruentes, porque possuem dois ângulos iguais: os ângulos de $\alpha/2$ e os ângulos retos PBO e PAO e um lado comum, o lado OP .

Como os dois triângulos são congruentes, as medidas são iguais, ou seja, $PA = PB$. Dessa maneira, mostramos que P é o centro de uma circunferência que é tangente às duas retas r e s .



Além disso, ainda pela congruência dos triângulos OPA e OPB , provamos um resultado que já havíamos apresentado previamente. Podemos concluir que os comprimentos $OA = OB$.

Sendo assim, considerando um ponto O qualquer, é possível construir duas tangentes à circunferência e elas terão o mesmo comprimento.

DIRETO DO CONCURSO

011. (CESPE/DEPEN/AGENTE PENITENCIÁRIO/2013) Abaixo a figura 1 apresenta o arco de circunferência AB correspondente ao ângulo central de $2\pi/3$ de uma circunferência de centro O e raio $AO=12$ cm e figura 2 apresenta alguns triângulos. A partir dessas informações e

considerando que XY denote a distância entre os pontos X e Y considere, ainda, as seguintes proposições:

U: o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é maior do que $\overline{AO} + \overline{OB}$.

V: $\overline{QR} + \overline{RP} + \overline{PS} < \overline{QP} + \overline{PS}$

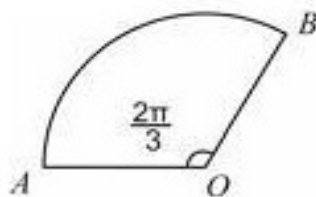


Figura 1

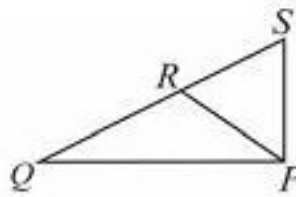


Figura 2

Com base nas informações e nas figuras acima apresentadas e tomando 3,14 como valor aproximado de π , julgue o item a seguir.

A proposição $U \rightarrow V$ é falsa.



Avaliaremos separadamente cada uma das proposições.

Obs.: radianos

$$\widehat{AB} = R \cdot \theta \text{ ou } 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Assim, temos:

$$U: \widehat{AB} > \overline{AO} + \overline{OB}$$

$$\widehat{AB} = L = R \cdot \theta = R \cdot \frac{2\pi}{3} = R \cdot \frac{2 \cdot 3,14}{3} \quad (I)$$

$$\overline{AO} + \overline{OB} = R + R \quad (II)$$

$$I > II$$

Portanto, a proposição U é verdadeira.

Analisando a proposição V, temos:

$$V: \overline{QR} + \overline{RP} + \overline{PS} < \overline{QP} + \overline{PS}$$

$$V: \overline{QR} + \overline{RP} < \overline{QP}$$

Podemos concluir que, em um triângulo, a medida de um dos lados não pode ser maior que a soma dos outros lados. Assim, a proposição V é falsa.

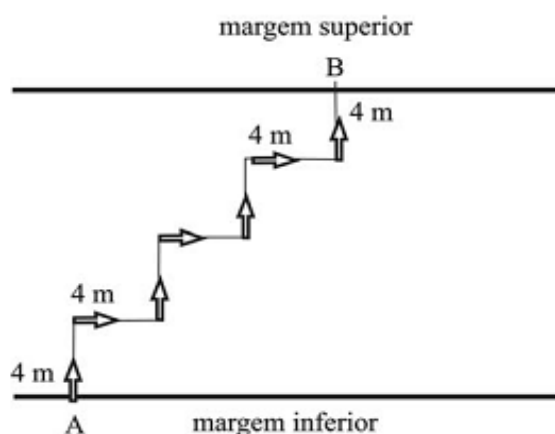
Um condicional só é falso se $V \rightarrow F$.

Certo.

012. (CESPE/SERES/PE/AGENTE DE SEGURANÇA PENITENCIÁRIA/2017) A figura a seguir mostra o esquema utilizado por um indivíduo na travessia de um rio — de margens paralelas e com forte correnteza —, saindo do ponto A, na margem inferior, e indo ao ponto B, na margem superior.

Ele nadava por 4 m na direção perpendicular às margens e, enquanto descansava, a correnteza o levava por 4 m rio abaixo na direção paralela às margens.

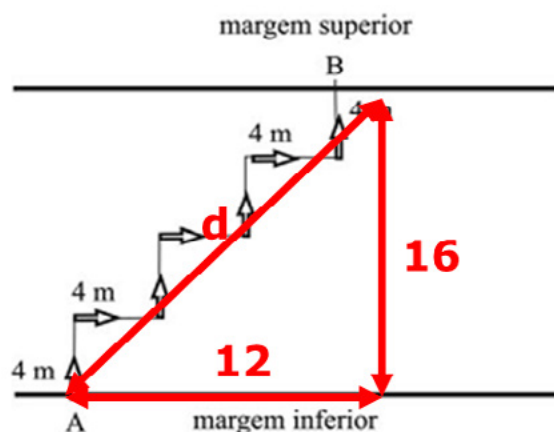
Fez esse esquema por três vezes e, na quarta vez que nadou perpendicularmente às margens, ele atingiu a margem superior, no ponto B. Nessa situação, a distância do ponto A ao ponto B é igual a:



- a) 12 m
- b) 16 m
- c) 20 m
- d) 28 m
- e) 32 m



Observe que a travessia é feita perpendicularmente às margens do rio: o indivíduo nada na direção perpendicular e é arrastado pela correnteza paralelamente às margens. Se somarmos os trechos em suas respectivas direções, veremos que a distância do ponto A ao ponto B é dada pela hipotenusa de um triângulo retângulo, como mostra o esquema a seguir:



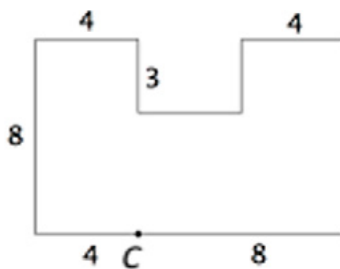
Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} \therefore d = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20 \text{ m}$$

Letra c.

013. (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR/BA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR I/2017) No polígono representado na figura a seguir, dois lados consecutivos são sempre perpendiculares.



Esse polígono representa uma sala vista de cima, e os números que aparecem na figura são as medidas, em metros, dos respectivos segmentos.

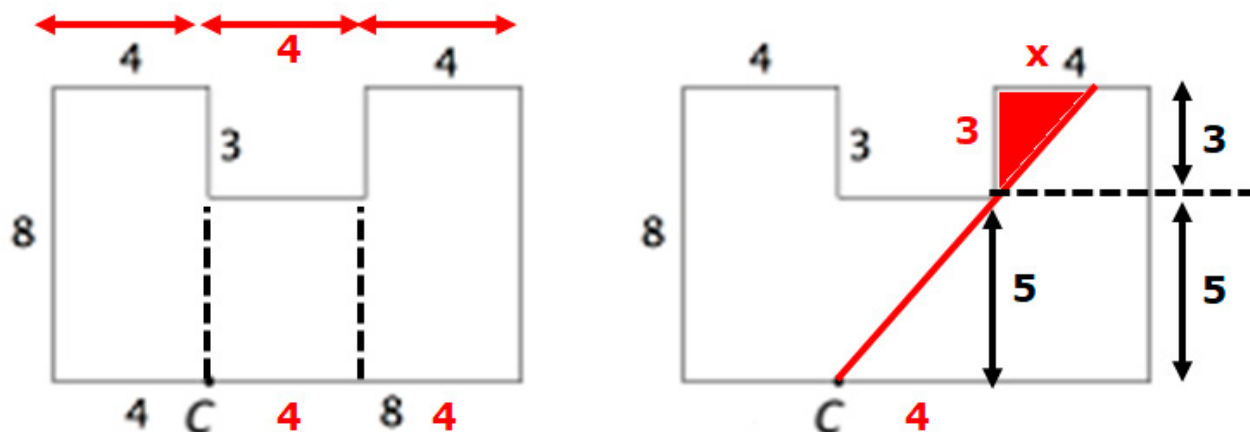
Uma câmera foi colocada no ponto C da figura, conseguindo, dessa posição, registrar imagens de quase toda a sala. Entretanto, há uma região da sala que a câmera não consegue ver.

A área, em m^2 , da região que não pode ser alcançada pela câmera é de:

- a) 3,6
- b) 4,0
- c) 4,5
- d) 6,4
- e) 7,2



Nesse tipo de questão, primeiramente nos atentamos para a área em que a câmera, localizada no ponto C, **NÃO** é capaz de alcançar. Observe a figura abaixo, em que a área hachurada não pode ser vista, pois há uma parede bloqueando a imagem. A área corresponde a um triângulo retângulo de catetos com medidas de 3 e 4 m. Então, podemos decompor a figura e calcular as áreas:



Vejamos. Perceba que os triângulos ABD e CDE são semelhantes e, utilizando essa semelhança, calcularemos a medida de representada por x na equação abaixo:

$$ABD \sim CDE$$

$$\frac{x}{4} = \frac{3}{5} \therefore 5x = 4 \cdot 3$$

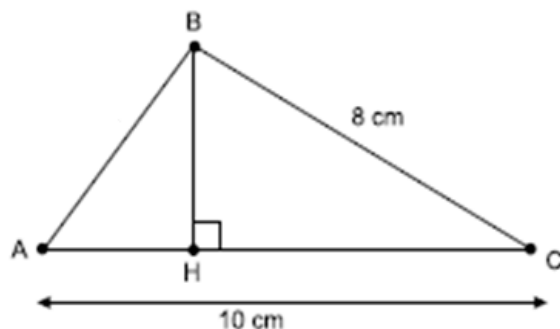
$$\therefore x = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ m}$$

O próximo passo é calcular a área do triângulo hachurado. Como ele é retângulo, essa área é igual ao produto dos catetos. Assim, temos:

$$S_A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{2,4 \cdot 3}{2} = 3,1,2 = 3,6 \text{ m}^2$$

Letra a.

014. (VUNESP/MPE/SP/OFFICIAL DE PROMOTORIA I/ADAPTADA/2016) No triângulo retângulo ABC da figura, BH é a altura relativa ao lado AC. O perímetro do triângulo BHC, em cm, é um número real que se encontra entre:



- a) 16 e 17
- b) 15 e 16
- c) 18 e 19
- d) 19 e 20
- e) 17 e 18



A questão traz um triângulo maior e outro menor. Note que o que se pede é o perímetro do triângulo BHC e que não temos nem a medida da projeção do cateto $\overline{BC}$, nem a medida da altura relativa à hipotenusa $\overline{BH}$.

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$10^2 = 8^2 + c^2 \therefore c^2 = 10^2 - 8^2 \therefore c^2 = 100 - 64$$

$$c^2 = 36 \therefore c = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

Como a questão pede o perímetro do triângulo BHC, precisamos saber o valor de cada projeção dos catetos do triângulo ABC.

Atenção: $\overline{HC}$ é a projeção do cateto a sobre a hipotenusa e será representado por m !

Podemos, então, recorrer à proporcionalidade entre os catetos e suas projeções. Temos:

$$\frac{m}{\overline{BC}} = \frac{n}{\overline{AB}}$$

$$\frac{m}{8} = \frac{10 - m}{6}$$

$$6m = 80 - 8m \therefore 14m = 80 \therefore m = \frac{80}{14} = \frac{40}{7} = 5,7 \text{ cm}$$

Podemos prosseguir para o cálculo da altura referente à hipotenusa do triângulo ABC por meio da relação:

$$a \cdot h = b \cdot c$$

$$10 \cdot h = 8 \cdot 6 \therefore h = \frac{48}{10} = 4,8 \text{ cm}$$

Finalmente, o perímetro do triângulo BHC será:

$$P = \overline{BC} + \overline{BH} + \overline{HC} = 8 + h + m = 8 + 4,8 + 5,7 = 18,5 \text{ cm}$$

O perímetro é um número real que se encontra entre 18 e 19 cm.

Letra c.

015. (CESPE/TRT/9ª REGIÃO/ANALISTA JUDICIÁRIO/ÁREA ADMINISTRATIVA/2007) O piso de uma sala deve ser revestido com peças de cerâmica em forma de triângulos retângulos isósceles cuja hipotenusa mede $16\sqrt{2}$ cm. Calculou-se que seriam necessárias pelo menos 3.000 peças para cobrir todo o piso. Nessa situação, conclui-se que a área desse piso é superior a 38 m^2 .

Obs.: Use que $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ ou que $1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$.



Quando temos triângulos retângulos isósceles, sabemos que seus catetos possuem a mesma medida e, por serem “retângulos”, podemos descobrir a medida dos catetos aplicando o Teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(16\sqrt{2})^2 = b^2 + b^2$$

$$\therefore 2b^2 = 256$$

$$\therefore b = \sqrt{256} = 16 \text{ cm}$$

Agora, partimos para calcular a área dos triângulos.

$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

Como o triângulo é isósceles, os catetos são iguais e temos:

$$S_{\Delta} = \frac{b \cdot b}{2} = \frac{b^2}{2} = \frac{16^2}{2} = \frac{256}{2} = 128 \text{ cm}^2$$

Podemos concluir que a área do piso é o número de peças multiplicado pela área do triângulo.

$$S_{\text{piso}} = 3000 \cdot S_{\Delta}$$

$$S_{\text{piso}} = 3000 \cdot 128 = 384000 \text{ cm}^2$$

Para encontrar a área do piso em m^2 é só dividir por 10000:

$$S_{\text{piso}} = \frac{384000 \text{ cm}^2}{10000 \text{ cm}^2} = 38,4 \text{ m}^2$$

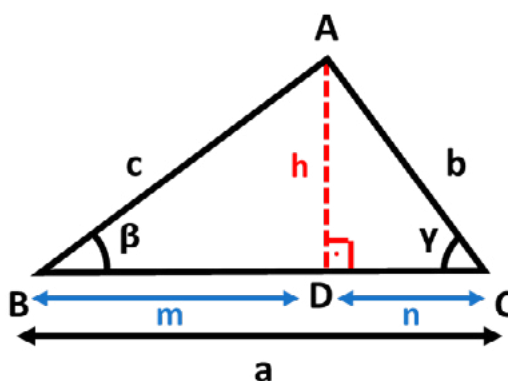
Certo.

4. TRIÂNGULOS QUAISQUER

4.1. LEI DOS COSSENOS

A lei dos cossenos é uma generalização do Teorema de Pitágoras, que permite calcular um lado qualquer em função dos outros dois e do ângulo formado entre eles.

Vamos supor um triângulo geral e a altura relativa ao lado **a**.



Nosso objetivo é calcular o lado **c** a partir dos outros dois lados **a** e **b** e do ângulo formado por esses lados, representado como γ , e que se encontra no vértice C.

A altura em relação ao lado **a** produziu o triângulo retângulo ADB, cuja hipotenusa é o lado **c**. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$c^2 = m^2 + h^2$$

A altura **h** é um cateto do triângulo retângulo ADC. Então, aplicando o Teorema de Pitágoras nesse triângulo, temos:

$$b^2 = n^2 + h^2$$

$$\therefore h^2 = b^2 - n^2$$

Podemos substituir na equação do Teorema de Pitágoras do triângulo ADB:

$$c^2 = m^2 + (b^2 - n^2) = m^2 - n^2 + b^2$$

Observe que a projeção **m** pode ser calculada como a diferença **a - n**, já que o lado **a** é igual à soma das duas projeções. Então, podemos escrever:

$$c^2 = (a - n)^2 - n^2 + b^2$$

O quadrado da diferença é um produto notável: é igual ao quadrado do primeiro mais o quadrado do segmento menos duas vezes o produto dois dos termos:

$$c^2 = a^2 - 2an + n^2 - n^2 + b^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2an$$

Por fim, podemos utilizar o cosseno do ângulo γ no triângulo ADC. Para fins de deixar a lei mais fácil de se memorizar, costuma-se representá-lo por C, tendo em vista que ele está no vértice C.

$$\cos C = \frac{n}{b} \therefore n = b \cdot \cos C$$

Substituindo na equação anterior, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Portanto, um lado qualquer de um triângulo qualquer pode ser calculado como a soma dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto dos dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles.

Para aplicar essa lei, devemos fazer algumas observações:

- se o ângulo for agudo, o seu cosseno será fornecido pelo enunciado;
- se o ângulo for reto (90°), o seu cosseno é igual a zero, e a Lei dos Cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras;
- se o ângulo for obtuso (maior que 180°), o seu cosseno será o negativo do cosseno do ângulo suplementar. Isto é:

$$\cos(\alpha) = -\cos(180^\circ - \alpha)$$

Já demonstramos os cossenos dos ângulos 30° , 45° e 60° . Com isso, podemos concluir os cossenos dos ângulos suplementares. Lembre-se de que o ângulo suplementar a um ângulo é. Portanto, os ângulos suplementares são, respectivamente, iguais a 150° , 135° e 120° :

Ângulo Suplementar

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos(150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

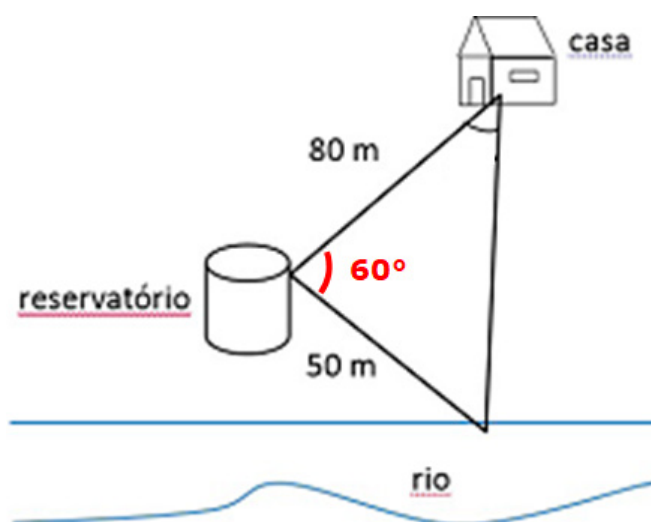
$$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos(135^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \quad \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$$

DIRETO DO CONCURSO



016. (IBEG/SANEAGO/BIOLOGO/2013/ADAPTADA) Considere uma casa a 80m de distância de um reservatório de uma companhia de saneamento de um determinado Estado Brasileiro. A água do rio é captada e bombeada para o reservatório que fica a 50m de distância do rio, conforme ilustrado abaixo:



Se a intenção é bombear a água do mesmo ponto de captação no rio diretamente para a casa, quantos metros de encanamento serão necessários? (Sugestão: Lei dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$, $\cos 60^\circ = 0,5$)

a) 56m.

- b) 64m.
- c) 70m.
- d) 75m.
- e) 78,5m.



Usando a Lei dos Cossenos, podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos C$$

$$a^2 = 50^2 + 80^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos 60^\circ$$

$$a^2 = 2500 + 6400 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 0,5$$

$$a^2 = 2500 + 6400 - 4000 = 4900$$

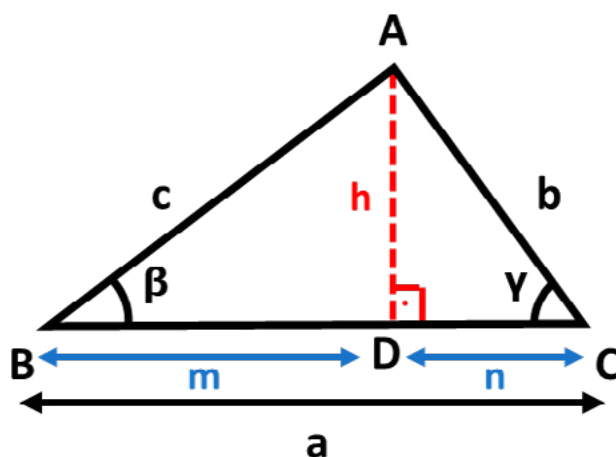
Agora, basta extrair a raiz quadrada.

$$a = \sqrt{4900} = 70$$

Letra c.

4.2. LEI DAS ÁREAS

A altura de um triângulo pode ser facilmente calculada em função dos senos dos ângulos internos. Vejamos um triângulo genérico e a altura em relação ao lado **a**:



Pela definição de área, a área do triângulo pode ser calculada como metade do produto entre o lado **a** e a altura relativa a ele **h**:

$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

Como o triângulo ADC é retângulo, podemos calcular o seno do ângulo γ . Para fins de facilitar o entendimento da fórmula, é comum representá-lo por C, tendo em vista que ele está no vértice C.

$$\text{sen } C = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{b} \therefore h = b \cdot \text{sen } C$$

Substituindo a altura na expressão da área, temos:

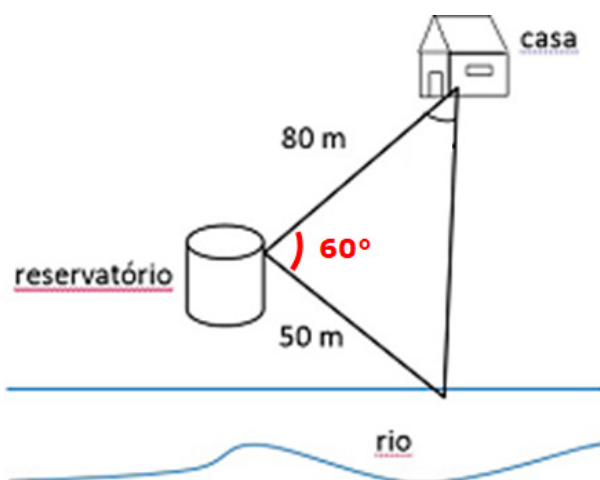
$$S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } C}{2}$$

Portanto, a área de um triângulo qualquer pode ser calculada como a metade do produto de dois lados pelo seno do ângulo formado entre eles. Essa mesma relação vale para todos os outros pares de lados:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } C}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen } B}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } A}{2}$$

DIRETO DO CONCURSO

017. (IBEG/SANEAGO/BIOLOGO/ADAPTADA/2013) Determine a área do triângulo a seguir.





Usando a Lei das Áreas, a área do triângulo é igual à metade do produto entre dois lados quaisquer e o seno do ângulo formado entre eles:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} = \frac{50 \cdot 80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{50 \cdot 80 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S = 50 \cdot 20 \cdot \sqrt{3} = 1000 \cdot \sqrt{3}$$

1000√3.

4.3. FÓRMULA DE HIERÃO

A fórmula de Hierão permite calcular a área de um triângulo qualquer exclusivamente em função dos seus lados. Para isso, é interessante nos recordarmos da definição do semiperímetro, que é a metade do perímetro de um triângulo:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

É possível demonstrar que a área do triângulo será dada pelo produto:

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Assim, a área do triângulo é igual à raiz quadrada dos produtos do semiperímetro e de todas as diferenças entre o semiperímetro e cada um dos lados do triângulo.

DIRETO DO CONCURSO



018. (IBADE/PMERJ/SOLDADO/2023) A área total interna ao triângulo de lados 7m, 9m e 14m é de, aproximadamente:

Obs.: se necessário, utilize $\sqrt{2} = 1,4$; $\sqrt{3} = 1,7$ e $\sqrt{5} = 2,2$.

- a) 28,4 m²
- b) 26,4 m²
- c) 24,4 m²
- d) 22,4 m²
- e) 20,4 m²



A forma mais simples de calcular a área de um triângulo a partir de seus lados é pela Fórmula de Hierão. Para usá-la, vamos calcular o semiperímetro.

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{7 + 9 + 14}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Então, temos que a área do triângulo é:

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

$$S = \sqrt{15 \cdot (15 - 7) \cdot (15 - 9) \cdot (15 - 14)}$$

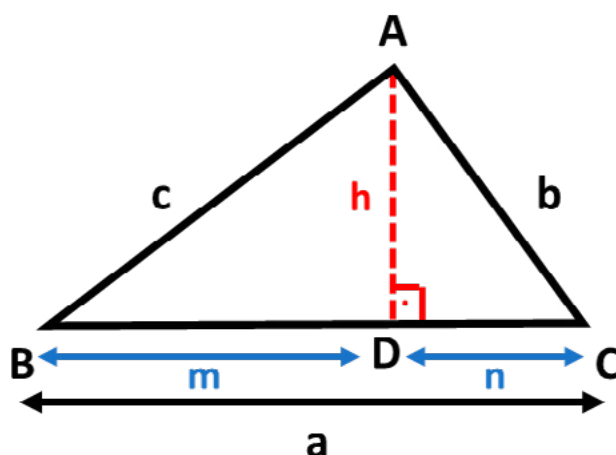
$$S = \sqrt{15 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1} = \sqrt{720} = \sqrt{144 \cdot 5} = 12\sqrt{5} = 12 \cdot 2,2 = 26,4 \text{ m}^2$$

Letra b.

4.3.1. DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA DE HIERÃO

A demonstração dessa fórmula é um pouco complicada. Vamos apresentar nesse material, mas apenas a título de curiosidade. Você não precisa saber fazer essa demonstração e pode pular diretamente para a parte de exercícios, se assim o desejar.

Vamos construir um triângulo qualquer ABC e a altura relativa ao lado **a**, denominada por **h**:



Por definição, a área do triângulo é igual à metade do produto entre o lado **a** e a sua altura relativa **h**.

$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

Como a altura define dois triângulos retângulos, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras tanto no triângulo ADB como no triângulo ADC, cujas hipotenusas são os lados **c** e **b**, respectivamente:

$$c^2 = m^2 + h^2$$

$$b^2 = n^2 + h^2$$

Podemos somar as duas equações:

$$c^2 = (a - n)^2 + h^2$$

$$c^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot n + n^2 + h^2$$

Pelo Teorema de Pitágoras em ADB, temos que $b^2 = n^2 + h^2$:

$$c^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot n + b^2$$

Assim, podemos isolar o termo **n**:

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2 \cdot a \cdot n$$

$$\therefore n = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

Agora, podemos utilizar novamente o Teorema de Pitágoras em ADC e obter que:

$$b^2 = n^2 + h^2$$

$$\therefore n^2 = b^2 - h^2 \therefore n = \sqrt{b^2 - h^2}$$

Substituindo na expressão anterior, temos:

$$\sqrt{b^2 - h^2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

Elevando tudo ao quadrado, temos:

$$b^2 - h^2 = \left[\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right]^2$$

Isolando a altura **h**, temos:

$$\therefore h^2 = b^2 - \left[\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right]^2$$

Então, podemos utilizar o produto notável da diferença dos quadrados. A diferença de quadrados é igual ao produto da soma pela diferença:

$$h^2 = \left[b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right] \cdot \left[b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right]$$

Por fim, podemos tirar o MMC dos dois lados:

$$h^2 = \left[\frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{2a} \right] \cdot \left[-\frac{a^2 - 2ab + b^2 - c^2}{2a} \right]$$

Utilizando o quadrado da soma e o quadrado da diferença, temos:

$$h^2 = \left[\frac{(a+b)^2 - c^2}{2a} \right] \cdot \left[\frac{c^2 - (a-b)^2}{2a} \right]$$

Chegamos, portanto, a duas diferenças de quadrados. Logo, podemos utilizar a ideia de que elas são iguais ao produto da soma pela diferença dos dois termos:

$$h^2 = \frac{1}{4a^2} \cdot [(a+b+c) \cdot (a+b-c)] \cdot [(-a+b+c) \cdot (a-b+c)]$$

Já chegamos a um resultado. Porém, podemos utilizar o semiperímetro para melhorar a aparência dessa expressão:

$$p = \frac{a+b+c}{2} \therefore (a+b+c) = 2 \cdot p$$

Além disso, podemos escrever:

$$2p - 2a = (a+b+c) - 2a = -a + b + c$$

$$2p - 2b = (a+b+c) - 2b = a - b + c$$

$$2p - 2c = (a+b+c) - 2c = a + b - c$$

Substituindo na expressão de h^2 , temos:

$$h^2 = \frac{1}{4a^2} \cdot [2p \cdot (2p - 2c)] \cdot [(2p - 2b) \cdot (2p - 2a)]$$

Observe que temos 2 vezes 2 quatro vezes, o que resulta em $2^4 = 16$.

$$h^2 = \frac{1}{4a^2} \cdot 16 \cdot [p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)]$$

Simplificando 16 por 4 e organizando a equação, temos:

$$h^2 = \frac{4[p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)]}{a^2}$$

Então, a altura do triângulo é:

$$h = \frac{2\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}}{a}$$

Por fim, utilizando a definição de área do triângulo, temos:

$$S = \frac{ah}{2} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

DIRETO DO CONCURSO

019. (INÉDITA/2024) Um triângulo possui lados de comprimento iguais a 7 cm, 9 cm e 14 cm. Determine a sua área.



Como foram dados todos os lados do triângulo, podemos calcular a área pela Fórmula de Hierão. Para isso, precisamos do semiperímetro:

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{7 + 9 + 14}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

A seguir, podemos calcular as diferenças entre o semiperímetro e cada um dos lados:

$$p - a = 15 - 7 = 8$$

$$p - b = 15 - 9 = 6$$

$$p - c = 15 - 14 = 1$$

Por fim, a área pela Fórmula de Hierão é:

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \sqrt{15 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1} = \sqrt{720}$$

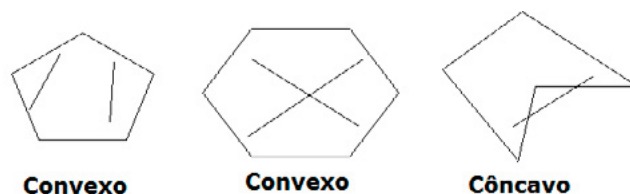
$\sqrt{720}$.

5. POLÍGONOS

Os polígonos são figuras geométricas fechadas formadas pela união de vários segmentos de reta. Vejamos alguns exemplos:

Um polígono é convexo quando todos os segmentos de reta entre dois pontos no interior do polígono estão inteiramente contidos no interior do polígono.

Vejam os um exemplo de polígono convexo. No pentágono e no hexágono abaixo, qualquer conjunto de dois pontos do interior do polígono produzirá um segmento de reta que está inteiramente contido no interior do polígono.



Por outro lado, a bandeira de São João é um polígono côncavo, porque é possível traçar um segmento de reta ligando dois pontos no interior do polígono, mas esse segmento de reta atravessa o polígono e não está inteiramente contido no seu interior.

Esse conceito de polígono côncavo e convexo é bastante importante para a Matemática.

5.1. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

Esse é um assunto bastante recorrente em questões de Geometria. A soma dos ângulos internos **de um polígono convexo** de N lados depende unicamente do número de lados do polígono.

$$S = (N-2) \cdot 180^\circ$$

ATENÇÃO

Essa expressão não vale para os polígonos côncavos.

A explicação para essa fórmula é que qualquer polígono convexo de N lados pode ser fracionado em $N - 2$ triângulos partindo de um vértice qualquer.

Veja que fracionamos o pentágono (5 lados) em 3 triângulos e o hexágono (6 lados) em 4 triângulos.

A soma dos ângulos internos do polígono é igual à soma de todos os ângulos internos de todos os triângulos. E, futuramente, mostraremos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Dessa maneira, podemos calcular que a soma dos ângulos internos do pentágono e do hexágono valem, respectivamente:

$$S_5 = (5 - 2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

$$S_6 = (6 - 2) \cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

5.2. ÂNGULO INTERNO DE UM POLÍGONO REGULAR

Um polígono é regular quando atende às seguintes condições:

- é convexo;
- todos os seus lados são iguais;
- todos os seus ângulos são iguais.

O ângulo interno de um polígono regular pode ser calculado facilmente com a fórmula estudada na seção anterior.

Já sabemos calcular a soma dos ângulos internos de um polígono de N lados. Como um polígono de N lados tem também N ângulos, a medida de cada ângulo é:

$$\alpha = \frac{S}{N}$$

$$\alpha = \left[\frac{N-2}{N} \right] \cdot 180^\circ$$

Dessa forma, os ângulos internos do pentágono e do hexágono são:

$$\alpha_5 = \left(\frac{5-2}{5} \right) \cdot 180^\circ = \frac{3}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ$$

$$\alpha_6 = \left(\frac{6-2}{6} \right) \cdot 180^\circ = \frac{4}{6} \cdot 180^\circ = 120^\circ$$

5.3. ÂNGULOS EXTERNOS DE UM POLÍGONO REGULAR

Um ângulo externo é aquele que é formado entre um lado de um polígono e o **prolongamento** de um lado vizinho, como mostrado a seguir.



A soma de todos os ângulos externos de um polígono regular convexo é **sempre** igual a 360° , independentemente do número de lados do polígono. Assim, se o polígono tiver N lados, o seu ângulo externo será:

$$\beta_n = \frac{360^\circ}{n}$$

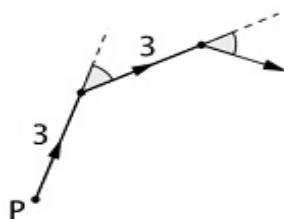
Dessa forma, o ângulo externo do pentágono e do hexágono regular são iguais a:

$$\beta_5 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\beta_6 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

DIRETO DO CONCURSO

020. (FGV/CODEBA/GUARDA PORTUÁRIO/2016) Um barco de pesca partiu do ponto P e navegou em linha reta, com velocidade constante por 3 milhas. Em seguida, virou a proa de um ângulo de 45° para a direita e navegou com a mesma velocidade por mais 3 milhas. A manobra foi repetida, sempre da mesma forma e com a mesma velocidade. A figura a seguir mostra o início do percurso desse barco. Após certo número de manobras, o barco voltou ao ponto P de partida.



Nesse percurso, o barco percorreu uma distância total de:

- a) 18 milhas.
- b) 21 milhas.
- c) 24 milhas.
- d) 27 milhas.
- e) 30 milhas.



O ângulo de 45° é obtido a partir do prolongamento do lado, ou seja, o ângulo externo do polígono. Sabendo disso, descobriremos o número de lados do polígono para determinar a distância total percorrida. Temos:

$$\beta_n = \frac{360^\circ}{n} \therefore 45^\circ = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\therefore n = \frac{360^\circ}{45^\circ} = 8 \text{ lados (octógono)}$$

Então, multiplicamos o número de lados pela distância percorrida em cada um dos segmentos:

$$L = n_{\text{lados}} \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ milhas}$$

Letra c.

021. (IBFC/TCM/RJ/TÉCNICO DE CONTROLE EXTERNO/2016) Sabe-se que a soma dos ângulos internos de um polígono é igual a 1260° . Se esse polígono é regular, então cada ângulo externo desse polígono é igual a:

- a) 140°
- b) 40°
- c) 126°
- d) 54°



Como a soma dos ângulos internos de um polígono foi dada no enunciado, o primeiro passo para descobrir a medida do ângulo externo é encontrar o número de lados do polígono.

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$1260^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$\frac{1260^\circ}{180^\circ} = (n - 2)$$

$$\frac{14}{2} = (n - 2)$$

$$7 + 2 = n$$

$$n = 9$$

Após a descoberta do número de lados do polígono, encontraremos a medida do ângulo externo por meio de:

$$\beta_9 = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\beta_9 = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

Letra b.

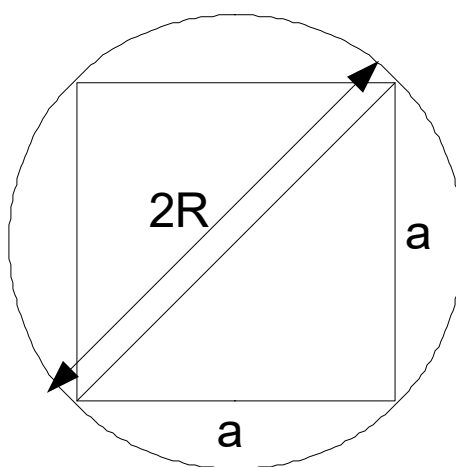
5.4. POLÍGONOS INSCRITOS

Um polígono é inscrito numa circunferência quando todos os seus vértices são pontos da circunferência.

Em questões de prova de concurso, é razoável que cobrem o triângulo regular, o quadrado e o hexágono inscrito.

5.4.1. QUADRADO

Para o caso do quadrado, façamos o seguinte desenho:



Na figura, podemos notar que a diagonal do quadrado é igual ao diâmetro da circunferência. A diagonal do quadrado pode ser calculada em função do lado pelo Teorema de Pitágoras.

$$D^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\therefore D = a\sqrt{2}$$

Agora, basta igualar a diagonal ao diâmetro da circunferência.

$$D = 2R$$

$$\therefore 2R = a\sqrt{2}$$

$$\therefore a = 2R\sqrt{2} = R\sqrt{2}$$

Sendo assim, o lado do quadrado inscrito na circunferência é igual ao raio da circunferência multiplicado pela raiz de dois.

Eu não recomendo que você decore as expressões para o lado do quadrado ou do hexágono em função do raio da circunferência.

DIRETO DO CONCURSO

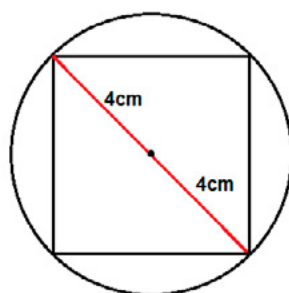


022. (CESPE/IFF/CONHECIMENTOS GERAIS/2018) Um quadrado tem todos os seus vértices sobre uma circunferência de 4 cm de raio. Nesse caso, a área desse quadrado é igual a

- a) 4 cm².
- b) 8 cm².
- c) 16 cm².
- d) 32 cm².
- e) 64 cm².



Observe a imagem a seguir.



Sabendo que a diagonal de qualquer quadrado é:

$$d = L\sqrt{2}$$

E que a diagonal do quadrado é $2 \cdot \text{raio} = 8\text{cm}$, temos:

$$8 = L\sqrt{2}$$

$$L = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

Logo, a área do quadrado será:

$$A = L^2 \rightarrow A = \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$A = \frac{8^2}{\sqrt{2}^2}$$

$$A = \frac{64}{2}$$

$$\therefore A = 32 \text{ cm}^2$$

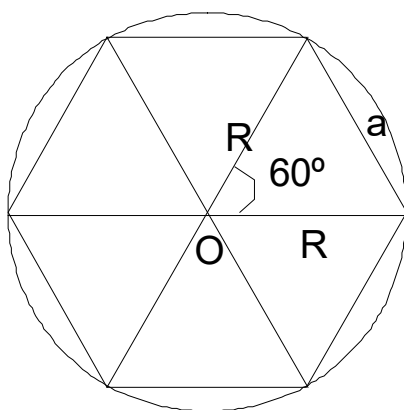
Letra d.

5.4.2. TRIÂNGULO

O triângulo é também uma situação bastante comum, porém deixaremos para mais adiante, quando teremos mais ferramentas para entender esse problema.

5.4.3. HEXÁGONO

Uma sacada interessante é que, traçando o raio da circunferência, o hexágono a fatia em 6 partes, produzindo 6 ângulos de 60° .



Dessa maneira, o lado do hexágono forma **um triângulo equilátero** com os raios da circunferência. Logo, podemos escrever:

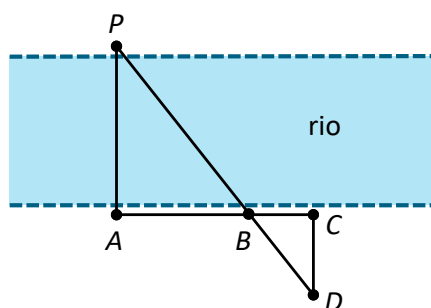
$$a = R$$

QUESTÕES COMENTADAS EM AULA

001. (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR/BA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR II/DIREITO/2017) A figura a seguir mostra um rio de margens retas e paralelas.

João, que está em uma das margens, gostaria de obter uma medida aproximada da largura do rio. Para isso, adotou o seguinte procedimento:

- buscou um ponto de referência na margem oposta e encontrou a pedra P;
- fixou uma estaca no ponto A, de forma que AP fosse perpendicular ao rio;
- caminhou paralelamente ao rio, fixou uma estaca em B e depois outra em C;
- a partir de C, caminhou perpendicularmente ao rio até que, no ponto D, viu as estacas B e P alinhadas com D;
- fixou mais uma estaca nesse ponto e, com uma trena, mediu as distâncias $AB = 20\text{m}$, $BC = 6\text{m}$ e $CD = 8,4\text{m}$.

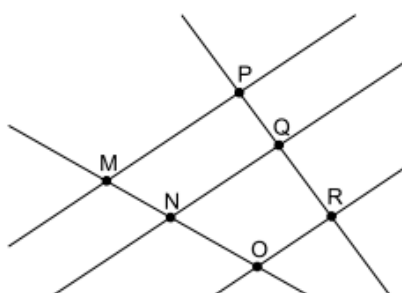


A distância, em metros, de A até P é de:

- a) 22,6
- b) 24,0
- c) 25,5
- d) 27,2
- e) 28,0

002. (VUNESP/PREFEITURA DE CANANÉIA/PROFESSOR DE ENSINO FUNDAMENTAL/2020)

Em um livro didático, consta a seguinte figura:

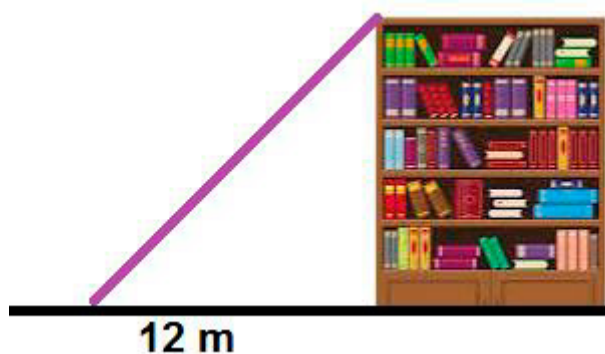


Sobre essa figura, há informações, no livro, de que as retas que contêm os pontos M e P, N e Q, e O e R são paralelas, e que as medidas dos segmentos de extremidades MN, PQ e PR, em certa unidade de medida u , são iguais a $5u$, $4u$ e $9u$, respectivamente.

Como exercício, é solicitado que o aluno determine a medida do segmento NO, na unidade de medida u , cuja resposta correta é:

- a) 5,25.
- b) 5,50.
- c) 5,75.
- d) 6,00
- e) 6,25.

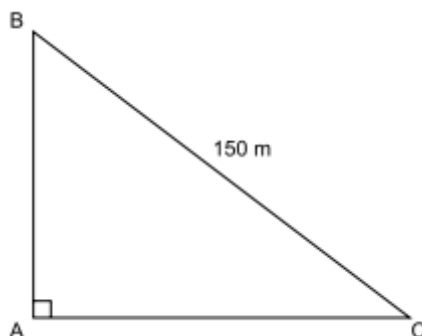
003. (FUNDATEC/PREFEITURA DE PARAÍ/AUXILIAR EDUCACIONAL/2024) Uma escada de 13 metros de comprimento deve ser posicionada em uma estante de livros, conforme a figura abaixo:



Sendo assim, qual é a altura da estante, em metros?

- a) 2.
- b) 4.
- c) 5.
- d) 7.
- e) 9.

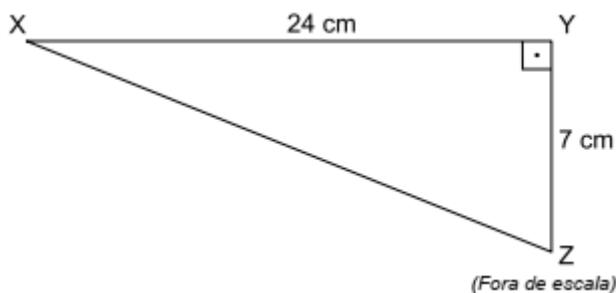
004. (VUNESP/PREFEITURA DE CANANÉIA/SP/ORIENTADOR SOCIAL/2020) Uma praça, com a forma do triângulo retângulo ABC mostrado na figura, tem uma pista para caminhadas em toda a extensão do seu perímetro. Para caminhar do ponto B até o ponto C, pode-se optar por ir diretamente de B até C, caminhando 150 m, conforme indicado na figura, ou ir do ponto B até o ponto A, caminhando x m, e do ponto A até o ponto C, caminhando mais 120 m.



O trajeto de B até C, passando por A, é mais longo do que o trajeto direto de B até C em

- a) 70 m.
- b) 60 m.
- c) 50 m.
- d) 40 m.
- e) 30 m.

005. (VUNESP/CÂMARA DA ESTÂNCIA BALNEÁRIA DE ITANHAÉM/SP/AGENTE DE MANUTENÇÃO E ZELADORIA/2017) Arthur desenhou numa folha de papel o triângulo retângulo a seguir. Ele afirmou, corretamente, que a medida do segmento XY mais a medida do segmento YZ é igual à medida segmento XZ mais _____ cm.

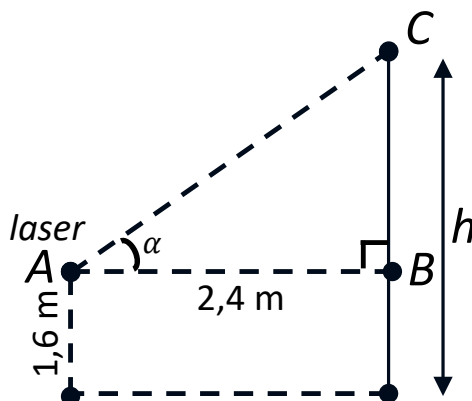


Das alternativas a seguir, aquela que completa corretamente a afirmação de Arthur é:

- a) 6
- b) 5
- c) 4
- d) 3
- e) 2

006. (CESPE/PREFEITURA DE SÃO CRISTÓVÃO/SE/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2019) A respeito da trigonometria do triângulo retângulo e das funções trigonométricas, julgue os itens que se seguem.

Situação hipotética: Um poste vertical mede h m de altura. A extremidade superior do poste, ponto C, é atingida por um laser localizado em um ponto A, a 2,4 m do poste e a 1,6 m do solo. Considerando o ponto B sobre o poste de forma que o triângulo ABC seja retângulo em B, o ângulo $\alpha = \angle CAB$ é tal que $\operatorname{tg} \alpha = 17/12$. A figura a seguir ilustra a situação apresentada. Assertiva: Nesse caso, o poste mede mais de 6 m de altura.



007. (INÉDITA/2017) Alexandre pode ir da cidade A até a cidade B por dois caminhos. O caminho direto é uma estrada que mede 10 km com muitos obstáculos, na qual a velocidade média é de 40 km/h. O caminho alternativo é composto por duas vias perpendiculares entre si passando por uma cidade C. Sabe-se que o ângulo entre as estradas AB e AC é de 37° e que $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$. A velocidade mínima que Alexandre deve utilizar nesse caminho para que esse caminho alternativo seja mais rápido que o caminho direto é de 48 km/h.

008. (VUNESP/UNESP/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2017) O quadrado da altura de um triângulo equilátero é exatamente 300. O perímetro desse triângulo, em uma determinada unidade de medida, é:

- a) 60
- b) 50
- c) 30
- d) 20
- e) 10

009. (CESPE/MEC/GUARDA MUNICIPAL/2011) Três crianças costumam brincar de caça ao tesouro, em local plano, na praia, da forma descrita a seguir: de posse de uma bússola, elas fixam um ponto P na praia com uma bandeirinha, uma delas esconde um brinquedo sob a areia e, depois, passa o mapa e a bússola para que as outras duas tentem encontrar o tesouro. O mapa consiste em uma sequência de instruções formadas pelo número de

passos em linha reta e um sentido — a partir da bandeirinha —, que deve ser observada para se encontrar o tesouro.

A partir do texto acima e considerando que a medida do passo de todas as crianças seja idêntica e que as instruções do mapa sejam seguidas na ordem apresentada, julgue os itens seguintes.

Se as crianças se unirem no ponto P e a primeira caminhar 2 passos para o norte, a segunda, 2 passos para o sudoeste e a terceira, 2 passos para o sudeste, o triângulo cujos vértices corresponderão às posições finais das crianças será equilátero.

010. (CESPE/PC/ES/PERITO CRIMINAL/2011) Suponha, também que as estações A, B e C tenham sido construídas em pontos equidistantes, de modo que a distância de uma dessas três estações para a outra seja de 150 km.

Com referência às informações contidas no texto acima e à considerações hipotéticas que a ele se seguem, e considerando 1,73 como valor aproximado para $\sqrt{3}$, julgue o item a seguir: Supondo que uma nova estação, D, seja instalada em um ponto equidistante das estações A, B e C, então a distância da estação D para as estações A, B e C será inferior a 87 km.

011. (CESPE/DEPEN/AGENTE PENITENCIÁRIO/2013) Abaixo a figura 1 apresenta o arco de circunferência AB correspondente ao ângulo central de $2\pi/3$ de uma circunferência de centro O e raio $AO=12$ cm e figura 2 apresenta alguns triângulos. A partir dessas informações e considerando que XY denote a distância entre os pontos X e Y considere, ainda, as seguintes proposições:

U: o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é maior do que $\overline{AO} + \overline{OB}$.

V: $\overline{QR} + \overline{RP} + \overline{PS} < \overline{QP} + \overline{PS}$

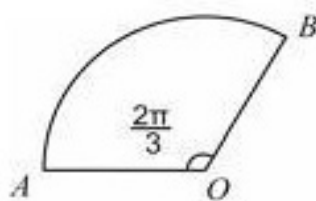


Figura 1

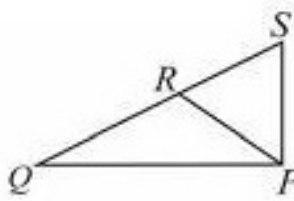


Figura 2

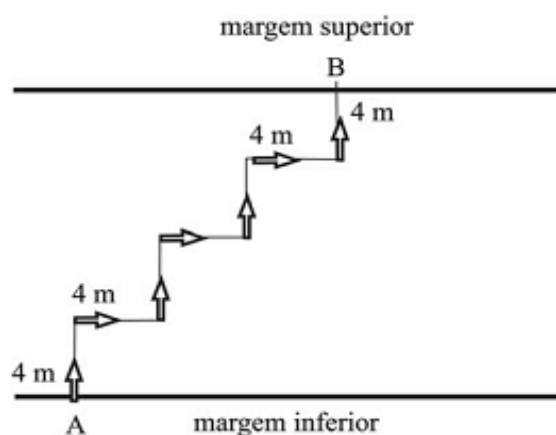
Com base nas informações e nas figuras acima apresentadas e tomando 3,14 como valor aproximado de π , julgue o item a seguir.

A proposição $U \rightarrow V$ é falsa.

012. (CESPE/SERES/PE/AGENTE DE SEGURANÇA PENITENCIÁRIA/2017) A figura a seguir mostra o esquema utilizado por um indivíduo na travessia de um rio — de margens paralelas e com forte correnteza —, saindo do ponto A, na margem inferior, e indo ao ponto B, na margem superior.

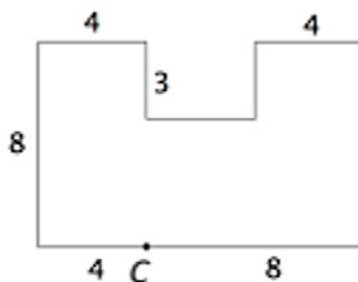
Ele nadava por 4 m na direção perpendicular às margens e, enquanto descansava, a correnteza o levava por 4 m rio abaixo na direção paralela às margens.

Fez esse esquema por três vezes e, na quarta vez que nadou perpendicularmente às margens, ele atingiu a margem superior, no ponto B. Nessa situação, a distância do ponto A ao ponto B é igual a:



- a) 12 m
- b) 16 m
- c) 20 m
- d) 28 m
- e) 32 m

013. (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR/BA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR I/2017) No polígono representado na figura a seguir, dois lados consecutivos são sempre perpendiculares.

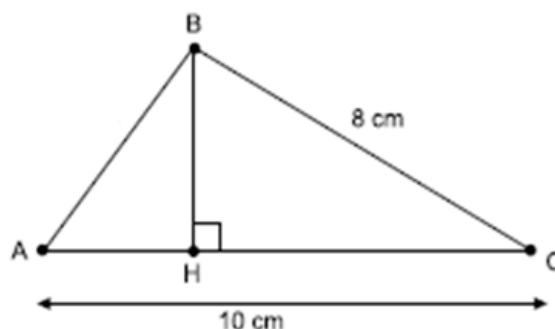


Esse polígono representa uma sala vista de cima, e os números que aparecem na figura são as medidas, em metros, dos respectivos segmentos.

Uma câmera foi colocada no ponto C da figura, conseguindo, dessa posição, registrar imagens de quase toda a sala. Entretanto, há uma região da sala que a câmera não consegue ver. A área, em m^2 , da região que não pode ser alcançada pela câmera é de:

- a) 3,6
- b) 4,0
- c) 4,5
- d) 6,4
- e) 7,2

014. (VUNESP/MPE/SP/OFFICIAL DE PROMOTORIA I/ADAPTADA/2016) No triângulo retângulo ABC da figura, BH é a altura relativa ao lado AC. O perímetro do triângulo BHC, em cm, é um número real que se encontra entre:

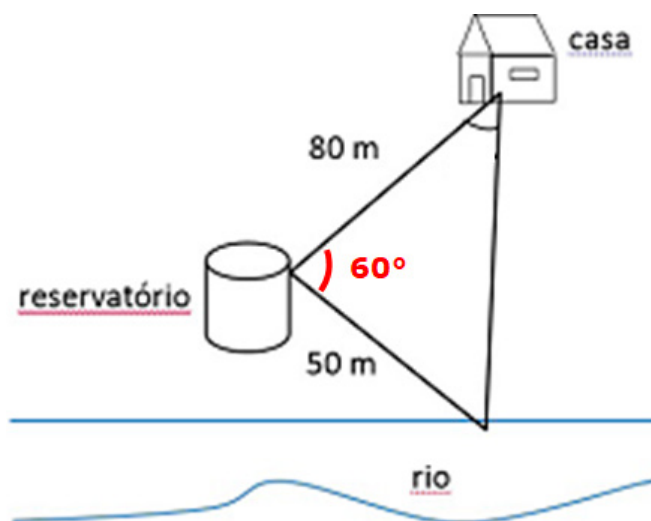


- a) 16 e 17
- b) 15 e 16
- c) 18 e 19
- d) 19 e 20
- e) 17 e 18

015. (CESPE/TRT/9ª REGIÃO/ANALISTA JUDICIÁRIO/ÁREA ADMINISTRATIVA/2007) O piso de uma sala deve ser revestido com peças de cerâmica em forma de triângulos retângulos isósceles cuja hipotenusa mede cm. Calculou-se que seriam necessárias pelo menos 3.000 peças para cobrir todo o piso. Nessa situação, conclui-se que a área desse piso é superior a $38 m^2$.

Obs.: Use que $1 m = 100 cm$ ou que $1 m^2 = 10000 cm^2$.

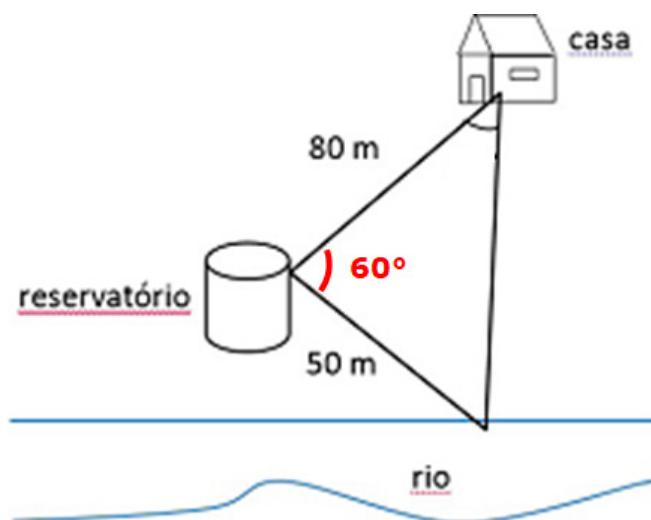
016. (IBEG/SANEAGO/BIOLOGO/2013/ADAPTADA) Considere uma casa a 80m de distância de um reservatório de uma companhia de saneamento de um determinado Estado Brasileiro. A água do rio é captada e bombeada para o reservatório que fica a 50m de distância do rio, conforme ilustrado abaixo:



Se a intenção é bombear a água do mesmo ponto de captação no rio diretamente para a casa, quantos metros de encanamento serão necessários? (Sugestão: Lei dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$, $\cos 60^\circ = 0,5$)

- a) 56m.
- b) 64m.
- c) 70m.
- d) 75m.
- e) 78,5m.

017. (IBEG/SANEAGO/BIOLOGO/ADAPTADA/2013) Determine a área do triângulo a seguir.



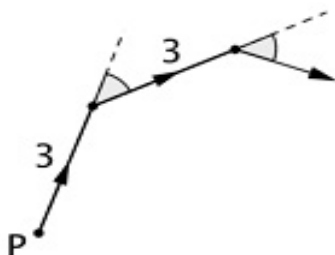
018. (IBADE/PMERJ/SOLDADO/2023) A área total interna ao triângulo de lados 7m, 9m e 14m é de, aproximadamente:

Obs.: se necessário, utilize $\sqrt{2} = 1,4$; $\sqrt{3} = 1,7$ e $\sqrt{5} = 2,2$.

- a) 28,4 m²
- b) 26,4 m²
- c) 24,4 m²
- d) 22,4 m²
- e) 20,4 m²

019. (INÉDITA/2024) Um triângulo possui lados de comprimento iguais a 7 cm, 9 cm e 14 cm. Determine a sua área.

020. (FGV/CODEBA/GUARDA PORTUÁRIO/2016) Um barco de pesca partiu do ponto P e navegou em linha reta, com velocidade constante por 3 milhas. Em seguida, virou a proa de um ângulo de 45° para a direita e navegou com a mesma velocidade por mais 3 milhas. A manobra foi repetida, sempre da mesma forma e com a mesma velocidade. A figura a seguir mostra o início do percurso desse barco. Após certo número de manobras, o barco voltou ao ponto P de partida.



Nesse percurso, o barco percorreu uma distância total de:

- a) 18 milhas.
- b) 21 milhas.
- c) 24 milhas.
- d) 27 milhas.
- e) 30 milhas.

021. (IBFC/TCM/RJ/TÉCNICO DE CONTROLE EXTERNO/2016) Sabe-se que a soma dos ângulos internos de um polígono é igual a 1260°. Se esse polígono é regular, então cada ângulo externo desse polígono é igual a:

- a) 140°
- b) 40°
- c) 126°
- d) 54°

022. (CESPE/IFF/CONHECIMENTOS GERAIS/2018) Um quadrado tem todos os seus vértices sobre uma circunferência de 4 cm de raio. Nesse caso, a área desse quadrado é igual a

- a) 4 cm^2 .
- b) 8 cm^2 .
- c) 16 cm^2 .
- d) 32 cm^2 .
- e) 64 cm^2 .

EXERCÍCIOS

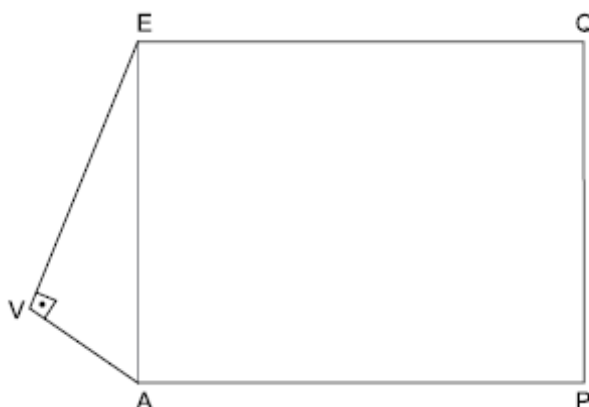
023. (FUNDATEC/CÂMARA DE SÃO MARTINHO DA SERRA/TESOUREIRO/2024) Um retângulo tem lados medindo 2,0 e 2,1 cm. Qual é a medida (em cm) de sua diagonal?

- a) 2,4.
- b) 2,5.
- c) 2,6.
- d) 2,8.
- e) 2,9.

024. (FCC/TRT 22/TÉCNICO JUDICIÁRIO/2022) Com 2 tiras de papel de mesma largura e comprimento é possível formar uma tira de 80 cm de comprimento, sendo que as tiras ficam superpostas 10 cm. Para formar uma tira de 76 cm de comprimento, com essas duas tiras, a proporção de uma tira que ficará sobreposta é:

- a) 14/45.
- b) 7/80.
- c) 7/40.
- d) 11/80.
- e) 28/45.

025. (VUNESP/FITO/ANALISTA DE GESTÃO/BIBLIOTECA/2020) O polígono AVEQP da figura representa um terreno e não está desenhado em escala. O triângulo EVA é retângulo em V e o quadrilátero EAPQ é um retângulo. As medidas de EV e VA são, respectivamente, iguais a 48 m e 20 m.

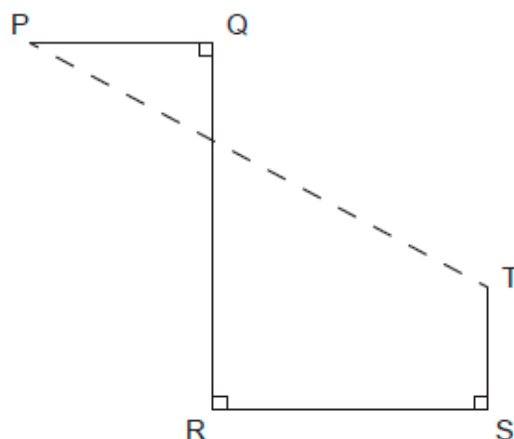


Se a medida do lado AP é igual a 75 m, então a área do terreno em m^2 é igual a:

- a) 4380.
- b) 4575.

- c) 5050.
- d) 5275.
- e) 6125.

026. (CESGRANRIO/IBGE/AGENTE DE PESQUISAS POR TELEFONE/2016) Na Figura a seguir, PQ mede 6 cm, QR mede 12 cm, RS mede 9 cm, e ST mede 4 cm.



A distância entre os pontos P e T, em cm, mede:

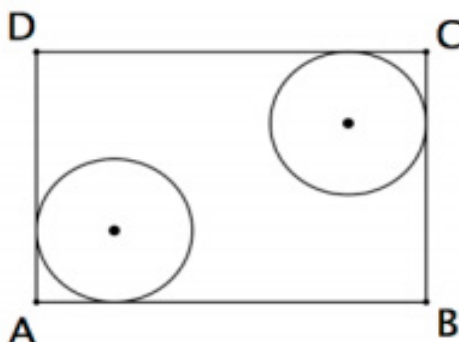
- a) 21
- b) 20
- c) 19
- d) 18
- e) 17

027. (FUNRIO/PREFEITURA DE TRINDADE/PEDAGOGO/2016) As dimensões de um terreno retangular são proporcionais a 3 e 4, e a medida de sua diagonal é igual a 50 m. A área desse terreno, em m^2 , equivale a:

- a) 300
- b) 400
- c) 800
- d) 1000
- e) 1200

028. (FGV/SEE/PE/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016)

A figura a seguir mostra o retângulo ABCD onde $AB = 10$ e $BC = 7$ e duas circunferências de raio igual a 2. As circunferências são tangentes a dois lados do retângulo.



A distância entre os centros dessas duas circunferências é:

- a) $5\sqrt{2}$
- b) $3\sqrt{3}$
- c) $4\sqrt{3}$
- d) $2\sqrt{5}$
- e) $3\sqrt{5}$

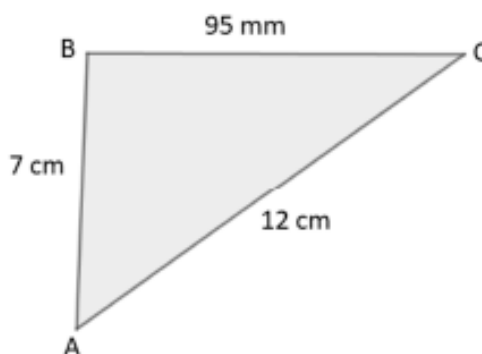
029. (CESPE/FUB/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/ADAPTADA/2008) Um quarto de uma casa tem o formato de um retângulo com área igual a 18 metros quadrados e perímetro igual a 20 metros.

A respeito dessa situação, julgue os itens subsequentes:

A medida das diagonais desse retângulo, em metros, não é um número inteiro.

030. (CEBRASPE/PETROBRÁS/GEOFÍSICO/2022) Em um triângulo ABC, tem-se que $AB = \sqrt{3}$, $BC = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/2$ e $\angle ABC = 45^\circ$. Nessa situação, é correto concluir que o lado $AC = \sqrt{2}$.

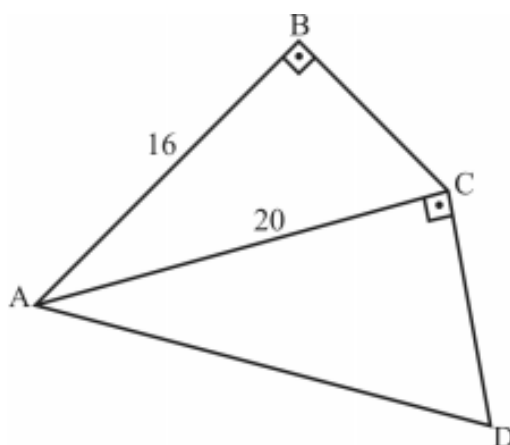
031. (FCC/PREFEITURA DE MACAPÁ/AP/PROFESSOR ANOS INICIAIS/2018) Uma joaninha e uma formiga partem de um ponto A com destino ao ponto C. A joaninha vai de A até C em linha reta, a formiga vai de A até B em linha reta e, depois, de B até C em linha reta. As distâncias percorridas estão indicadas na figura.



Nos percursos totais das duas, a distância percorrida pela formiga foi maior que a percorrida pela joaninha em

- a) 37,5%.
- b) 32%.
- c) 36,5%.
- d) 36%.
- e) 32,5%.

032. (CESPE/IFF/CONHECIMENTOS GERAIS/2018) No polígono ABCD da figura precedente, os triângulos ABC e ACD são semelhantes e retângulos — nos vértices B e C, respectivamente. Além disso, $AB = 16$ cm, $AC = 20$ cm e CD é o lado menor do triângulo ACD. Nessa situação, AD mede

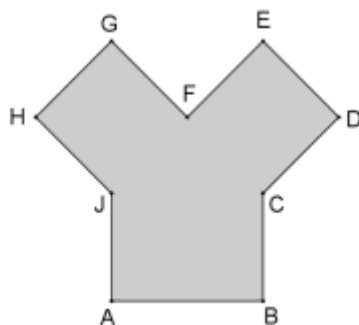


- a) 24 cm.
- b) 25 cm.
- c) 28 cm.
- d) 32 cm.
- e) 36 cm.

033. (FGV/PREFEITURA DE JABOATÃO DOS GUARARAPES/PROFESSOR/2023) Seja $ABCDEF$ um hexágono regular convexo de lados medindo 2 cm, com os vértices A e D ; B e E ; C e F sendo pares opostos. Seja ainda M o ponto médio do lado DE . A medida do segmento AM , em centímetros, é a raiz quadrada de

- a) 3.
- b) 7.
- c) 13.
- d) 15.
- e) 21.

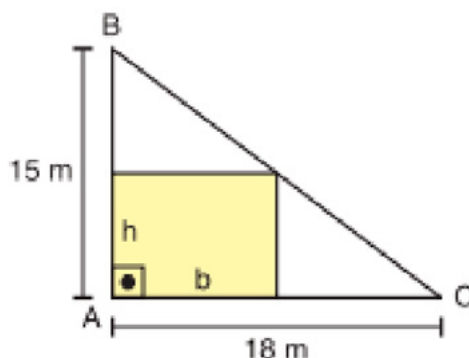
034. (FGV/PREFEITURA DE NITERÓI/ARQUITETO/2023) O polígono abaixo é a planta de um salão desenhado por um arquiteto. Os ângulos AJH e BCD medem 135° cada e todos os outros ângulos formados por dois lados consecutivos são retos. Com exceção do segmento AB, todos os outros lados do polígono medem 10m.



Considerando $\sqrt{2} = 1,41$, a área desse salão em metros quadrados é

- a) 350.
- b) 382.
- c) 391.
- d) 405.
- e) 414.

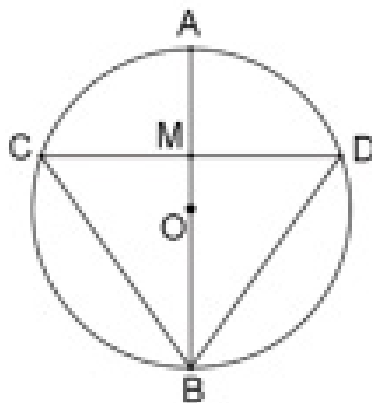
035. (CRESCER CONSULTORIAS/PREFEITURA DE JIJOCA DE JERICOACOARA CE/PROFESSOR EDUCAÇÃO BÁSICA I/2019) O projeto de uma casa popular vai ocupar uma região retangular, de dimensões b e h , em um terreno triangular, de acordo com a figura a seguir:



O terreno é um triângulo retângulo, e um dos vértices da região retangular da casa está sobre o maior lado desse triângulo. Assim, podemos afirmar que:

- a) A casa pode ser construída com dimensões $b = 9$ m e $h = 7$ m.
- b) A casa pode ser construída com $b = 3$ m e $h = 12,5$ m.
- c) As dimensões $h = 6$ m e $b = 10$ m vão determinar a maior medida da área possível para a casa.
- d) É possível construir uma casa cujas dimensões sejam $b = 18$ m e $h = 15$ m.

036. (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR/BA/PROFESSOR/MATEMÁTICA/2019) A figura a seguir mostra uma circunferência de centro O , um diâmetro AB e uma corda CD , perpendicular em M ao segmento AB .



Sabe-se que $OM = 2$ cm e que $MA = 4$ cm. A área em cm^2 do triângulo BCD é:

- a) $16\sqrt{2}$.
- b) $18\sqrt{2}$.
- c) $24\sqrt{2}$.
- d) $32\sqrt{2}$.
- e) $36\sqrt{2}$.

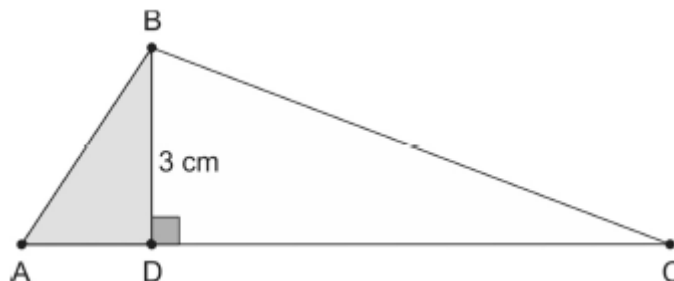
037. (EEAR/CONTROLADOR DE TRÁFEGO AÉREO/2023) Sejam os pontos A e B pertencentes a uma mesma circunferência λ , pelos quais são traçadas duas retas tangentes a λ e não paralelas entre si. Se a corda AB é o lado de um eneágono regular inscrito em λ , o ângulo obtuso formado pelas referidas retas mede ____.

- a) 100°
- b) 120°
- c) 140°
- d) 160°

038. (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR/BA/PROFESSOR/MATEMÁTICA/2019) O triângulo ABC está inscrito na circunferência de centro O . O ângulo OAB mede 28° e o ângulo ABC mede 65° . O ângulo ACB mede:

- a) 58° .
- b) 60° .
- c) 62° .
- d) 64° .
- e) 66° .

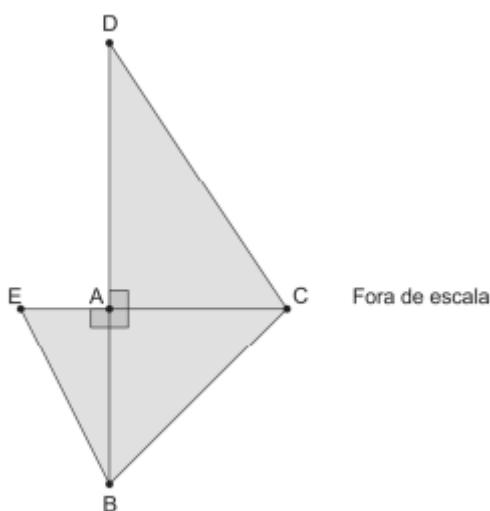
039. (FCC/PREFEITURA DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO/SP/AGENTE COMUNITÁRIO DE SAÚDE/2019)
Em um triângulo ABC a altura BD relativa ao lado AC mede 3 cm, conforme mostra a figura.



Sabendo que o segmento CD é 6 cm maior que o segmento AD e que a área do triângulo BCD é o quádruplo da área do triângulo ABD, a área do triângulo ABC, em cm^2 , é:

- a) 12
- b) 15
- c) 18
- d) 21
- e) 24

040. (FCC/PREFEITURA DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO/SP/AGENTE FISCAL DE POSTURAS/2019)
Os triângulos retângulos ABC, ABE e ACD, da figura abaixo, têm o vértice A em comum; o triângulo ABC é isósceles e tem área 8 cm^2 , e o segmento CE mede 6 cm.

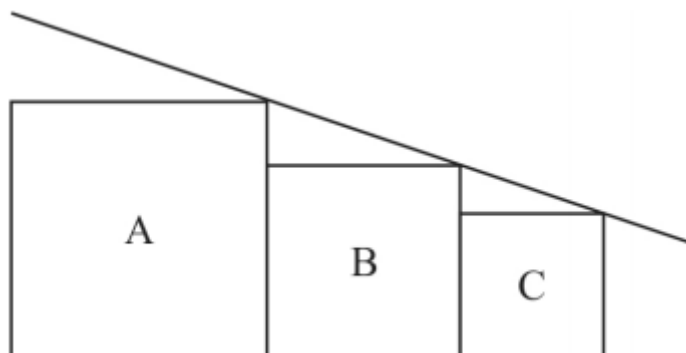


Sabendo que a área do triângulo ACD é o quádruplo da área do triângulo ABE, a medida, em cm, do segmento AD é:

- a) 8
- b) 12
- c) 16

- d) 20
e) 24

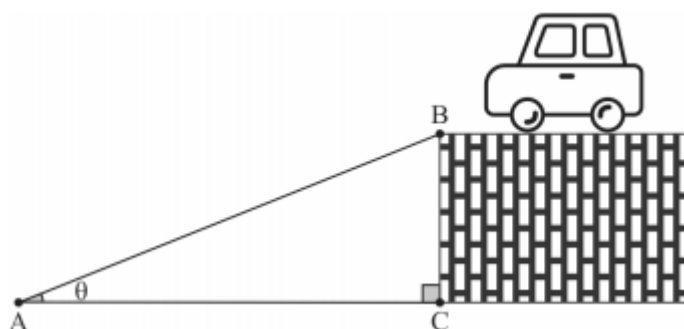
041. (CESPE/SEFAZ/RS/AUDITOR FISCAL DA RECEITA ESTADUAL/2019) Os quadrados A, B e C foram colocados lado a lado, de modo que uma reta contém os três vértices superiores, como mostra a figura a seguir.



Se a área do quadrado A for 24 cm^2 , e a área do quadrado C for 6 cm^2 , então a área do quadrado B será igual a

- a) 9 cm^2 .
b) 10 cm^2 .
c) 12 cm^2 .
d) 15 cm^2 .
e) 18 cm^2 .

042. (CESPE/SEFAZ/RS/AUDITOR FISCAL DA RECEITA ESTADUAL/2019) Para construir uma rampa de acesso a uma garagem, foi feito um projeto conforme a figura a seguir.

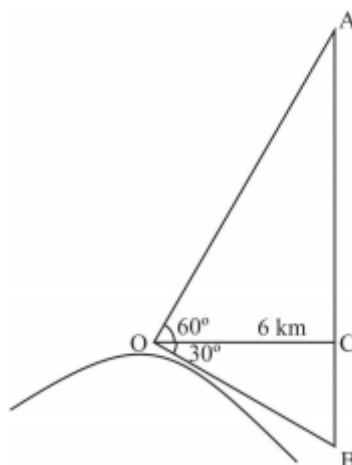


No projeto, a rampa é a hipotenusa AB do triângulo retângulo ABC. A altura da rampa, representada pelo cateto BC, deverá medir 2 m. A distância AC, representada pelo outro cateto do triângulo, deverá ser tal que a inclinação da rampa, dada pelo ângulo θ no vértice A, não seja superior a 30° .

Nessa situação, sabendo-se que $\operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}/3$, o comprimento do cateto AC, em metros, deverá ser tal que:

- a) $AC < \sqrt{3}/4$.
- b) $\sqrt{3}/4 \leq AC < \sqrt{3}/2$.
- c) $\sqrt{3}/2 \leq AC < \sqrt{3}$.
- d) $\sqrt{3} \leq AC < 2\sqrt{3}$.
- e) $AC \geq 2\sqrt{3}$.

043. (CESPE/SEFAZ/RS/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO FAZENDÁRIO/2018) O esquema a seguir mostra um observador no ponto O, que representa o cume de uma montanha, e um avião no ponto A, à altura AB do solo. O ponto C, no segmento AB, está a 6 km desse observador.



O observador enxerga o avião sob um ângulo de 60° com a horizontal OC e o ponto B, no solo, sob um ângulo de 30° com a mesma horizontal.

Admitindo-se 0,57 e 1,73 como valores aproximados para $\operatorname{tg} 30^\circ$ e $\operatorname{tg} 60^\circ$, respectivamente, é correto afirmar que a altura AB do avião é

- a) inferior a 8 km.
- b) superior a 8 km e inferior a 10 km.
- c) superior a 10 km e inferior a 12 km.
- d) superior a 12 km e inferior a 14 km.
- e) superior a 14 km.

044. (CESPE/SEFAZ/RS/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2018) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 13 centímetros e um dos catetos mede 5 centímetros. Nesse triângulo, considere o retângulo inscrito, em que o comprimento do lado maior é igual ao dobro do comprimento do lado menor, e um dos lados maiores está sobre o cateto maior do triângulo. Com base nessas informações, é correto afirmar que a área desse retângulo é igual a:

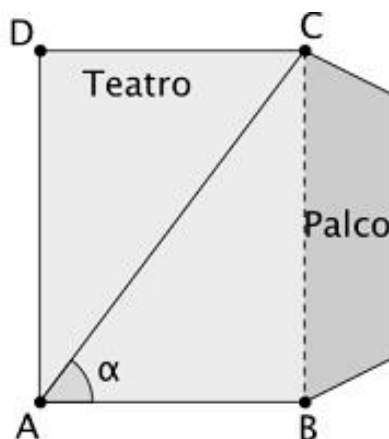
- a) $11250/529 \text{ cm}^2$.
- b) $3600/289 \text{ cm}^2$.
- c) $3600/49 \text{ cm}^2$.
- d) $1800/121 \text{ cm}^2$.
- e) 1800 cm^2 .

045. (FGV/AL/RO/ANALISTA LEGISLATIVO/2018) O retângulo ABCD tem dimensões $AB = 2$ e $BC = 4$. Os pontos M e N são médios dos lados BC e CD, respectivamente.

O cosseno do ângulo AMN é igual a

- a) $-1/\sqrt{3}$.
- b) $1/\sqrt{5}$.
- c) $-1/\sqrt{5}$.
- d) $1/\sqrt{10}$.
- e) $-1/\sqrt{10}$.

046. (FGV/FUNARTE/ASSISTENTE FINANCEIRO/2014) A plateia de um teatro, vista de cima para baixo, ocupa o retângulo ABCD da figura a seguir, e o palco é adjacente ao lado BC. As medidas do retângulo são $AB = 15\text{m}$ e $BC = 20\text{m}$.

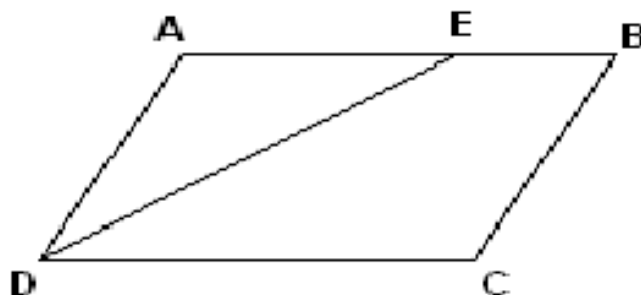


Um fotógrafo que ficará no canto A da plateia deseja fotografar o palco inteiro e, para isso, deve conhecer o ângulo da figura para escolher a lente de abertura adequada.

O cosseno do ângulo da figura acima é:

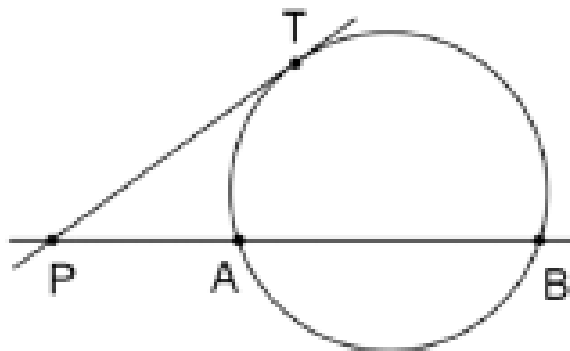
- a) 0,5;
- b) 0,6;
- c) 0,75;
- d) 0,8;
- e) 1,33.

047. (FUNRIO/IFPA/TÉCNICO EM SECRETARIADO/2016) O quadrilátero ABCD da figura abaixo é um paralelogramo e DE é bissetriz do ângulo CDA. Se $BC = 5$ cm e $BE = 3$ cm, o perímetro desse paralelogramo é igual a:



- a) 26 m
- b) 24 m
- c) 22 m
- d) 20 m
- e) 18 m

048. (FGV/AL-RO/ANALISTA LEGISLATIVO/MATEMÁTICA/2018) A figura a seguir mostra a secante PAB e a tangente PT a uma circunferência. Sabe-se que, no triângulo PTB, tem-se $PT = TB$ e que, na circunferência, os arcos AB e BT têm a mesma medida.

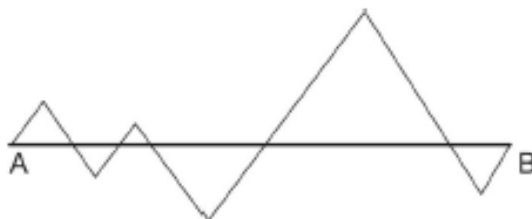


O ângulo APT mede:

- a) 30° .
- b) 36° .
- c) 40° .
- d) 45° .
- e) 60° .

049. (INÉDITA/2018) Considerando 1,73 como valor aproximado da raiz de 3 a área de hexágono inscrito numa circunferência de raio 10 cm é superior a 250 cm^2 .

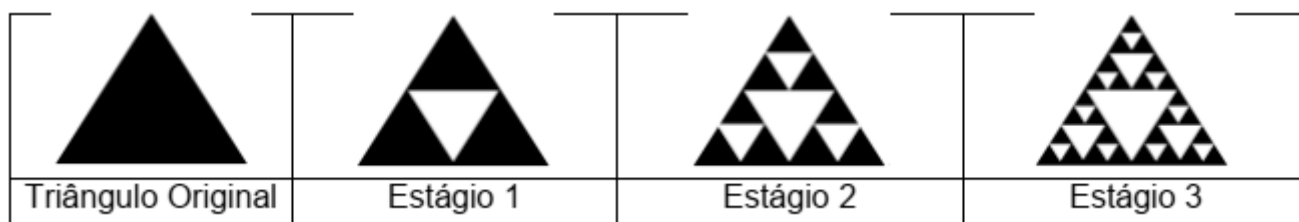
050. (FCC/PREFEITURA DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO/SP/ARQUITETO/DESAFIO/2019) Os seis triângulos que aparecem na figura são equiláteros, com bases no segmento AB que mede 36 cm.



A soma dos perímetros dos triângulos, em cm, é:

- a) 36
- b) 54
- c) 72
- d) 90
- e) 108

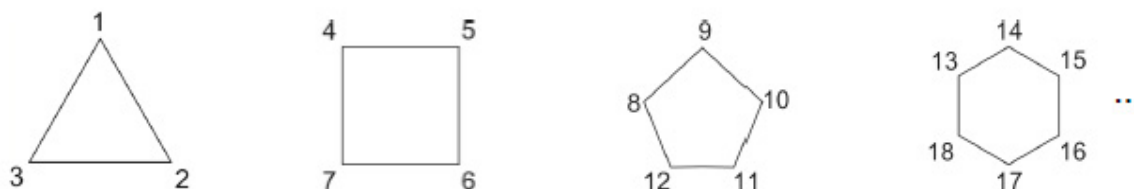
051. (FUMARC/SEE-MG/PROFESSOR DE EDUCAÇÃO BÁSICA/MATEMÁTICA/2018) O Triângulo de Sierpinsky é um fractal criado a partir de um triângulo equilátero, da seguinte forma: divide-se cada lado do triângulo ao meio, unem-se estes pontos médios e forma-se um novo triângulo equilátero.



Se continuarmos o processo, quantos triângulos brancos haverá no Estágio 10?

- a) 9.841
- b) 16.683
- c) 29.524
- d) 59.049
- e) 88.573

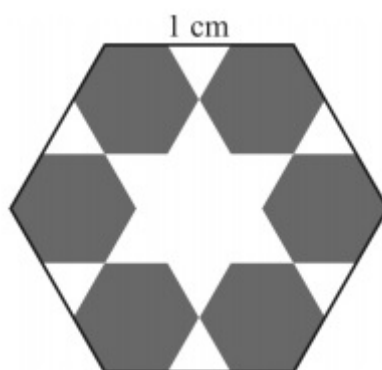
052. (FCC/PREFEITURA DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO/SP/ANALISTA EM VIGILÂNCIA SANITÁRIA/DESAFIO/2019) Considere uma sequência de polígonos em que os vértices são sucessivamente numerados, como mostra a figura.



O número de lados do polígono dessa sequência em que se encontra o vértice de número 250 é:

- a) 18
- b) 16
- c) 22
- d) 20
- e) 24

053. (CESPE/SEFAZ/RS/TÉCNICO TRIBUTÁRIO DA RECEITA ESTADUAL/DESAFIO/2018) A figura a seguir ilustra a primeira etapa de um processo recursivo que, a partir de um hexágono regular em que os lados medem 1 cm de comprimento, constroem-se 6 novos hexágonos regulares.

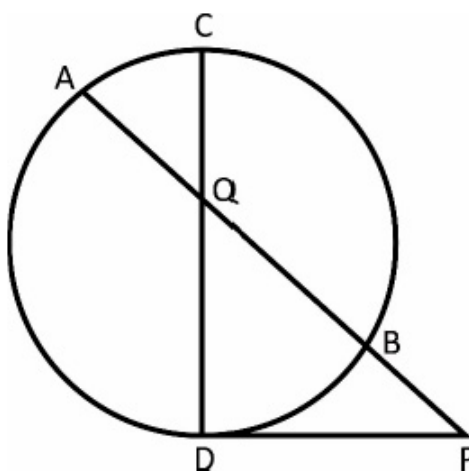


Nesse processo, os lados do hexágono externo são divididos em 3 partes iguais e, conforme mostra a figura, são construídos outros 6 hexágonos regulares; em cada um deles, o comprimento dos lados é igual a $\frac{1}{3}$ cm. Na segunda etapa, dividem-se os lados desses 6 novos hexágonos em 3 partes iguais, e constroem-se, de maneira semelhante à primeira etapa, outros 36 hexágonos regulares. Esse processo pode seguir indefinidamente.

Nessa situação, sabendo-se que, se o comprimento dos lados de um hexágono regular for igual a L cm, a área desse hexágono será igual a $3\sqrt{3}/2 L^2$ cm², é correto concluir que a soma das áreas dos hexágonos obtidos na 5ª etapa do processo recursivo descrito é igual a:

- a) $(2/3)^4 \times \sqrt{3}$ cm².
- b) $(2/3)^5 \times \sqrt{3}$ cm².
- c) $(3/2)^5 \times \sqrt{3}$ cm².
- d) $(2/3)^3 \times \sqrt{3}$ cm².
- e) $(3/2)^4 \times \sqrt{3}$ cm².

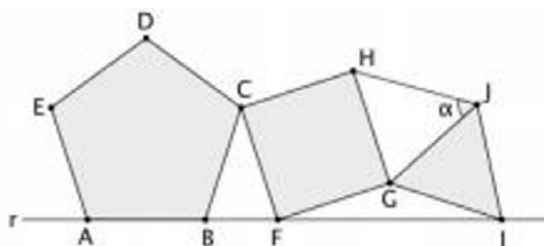
054. (QUADRIX/SEDUCE-GO/PROFESSOR DE NÍVEL III/MATEMÁTICA/2018) Em uma plantação de milho, foram encontradas marcas que moradores locais acreditam terem sido feitas por extraterrestres. No ponto Q, está localizada uma casa cujos residentes afirmam ter ouvido sons estranhos na noite passada. O desenho a seguir foi feito por um observador, de uma montanha, e pode conter distorções, mas foram feitas medidas precisas de algumas distâncias, como se segue: o círculo tem diâmetro CD; os segmentos AQ e CQ medem 6 km; e BP mede 4 km. Além disso, sabe-se que PD é tangente ao círculo em D.,



Com base nesse caso hipotético, assinale a alternativa correta.

- a) A soma das medidas de BQ, DQ e DP é igual a 28 e Q corresponde ao centro do círculo.
- b) A soma das medidas de BQ, DQ e DP é igual a 24 e Q corresponde ao centro do círculo.
- c) A soma das medidas de BQ, DQ e DP é igual a 20 e Q corresponde ao centro do círculo.
- d) A soma das medidas de BQ, DQ e DP é igual a 24 e Q não corresponde ao centro do círculo.
- e) A soma das medidas de BQ, DQ e DP é igual a 20 e Q não corresponde ao centro do círculo.

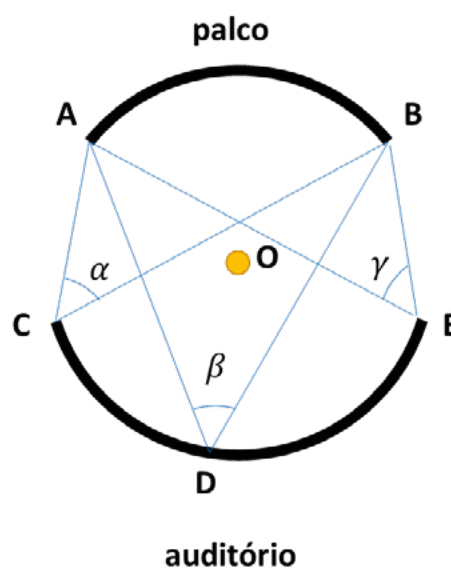
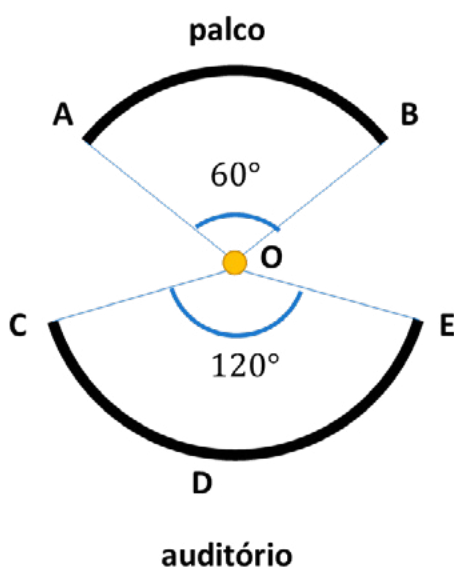
055. (FGV/PROCEMPA/TÉCNICO EM TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO/2024) A figura a seguir mostra três polígonos regulares todos com lados do mesmo tamanho e com os vértices A, B, F e I sobre a reta r.



O ângulo GJH mede em graus:

- a) 54
- b) 57
- c) 60
- d) 63
- e) 66

056. (INÉDITA/2024) O palco e o auditório foram construído na forma de arcos de circunferência AB e CE, que possuem o mesmo centro O e o mesmo raio $R = 10$ m.



Sendo α , β e γ os ângulos de visada dos espectadores C, D e E, a respeito desse auditório, julgue os seguintes itens:

Dado: $\pi = 3$; $\sin 120^\circ = 0,5$.

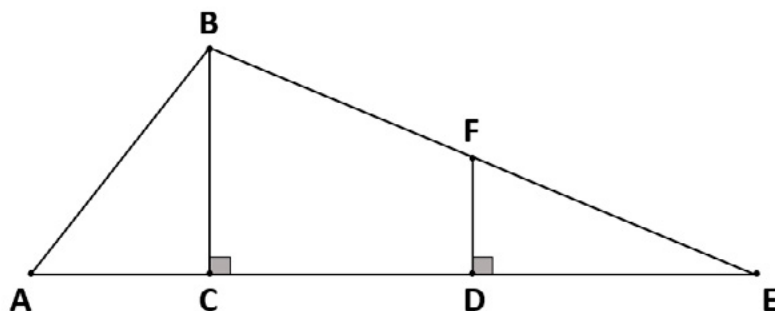
Os ângulos de visada dos espectadores C, D e E são iguais.

057. (INÉDITA/2024) O ângulo de visada de D é igual a 60° .

058. (INÉDITA/2024) O comprimento do palco é igual a 10 metros.

059. (INÉDITA/2024) A área do triângulo COE corresponde a 25% da área do setor circular COE.

060. (INÉDITA/2024) Considere o triângulo ABE indicado na figura associada. Os triângulos ABC, BCE e DEF são retos.



Julgue os itens a seguir.

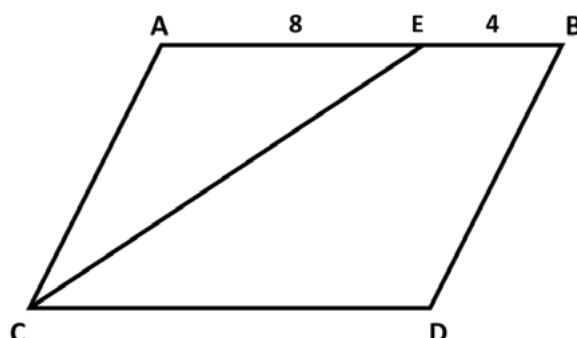
Suponha que os lados do triângulo DEF estão em Progressão Aritmética. Sabendo que a razão é 2, então a hipotenusa desse triângulo será 10.

061. (INÉDITA/2024) Suponha, agora, os seguintes valores: $DE = 4$ cm, $CE = 8$ cm e $FD = 3$ cm. Então o lado BC mede 12 cm.

062. (INÉDITA/2024) Considere que $\angle ABE = 90^\circ$ e $BC = 12$ cm. Além disso, $AC = 9$ cm. Então, pode-se afirmar que $BE = 20$ cm.

063. (INÉDITA/2024) Considere que $\angle ABE = 90^\circ$ e que $\angle DEF = \alpha$. Se $\angle FDE = 2\alpha$, então $\angle ABC = 20^\circ$.

064. (INÉDITA/2024) Sabendo que a reta CE é bissetriz do ângulo C, determine o perímetro do paralelogramo ABCD:



- a) 36
- b) 40
- c) 56
- d) 64

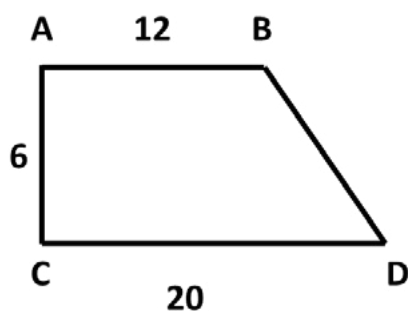
065. (INÉDITA/2024) Três cidades A, B e C estão situadas a uma distância de 400 km uma da outra, formando um triângulo equilátero. Deseja-se construir uma central de monitoramento de vizinha, que deve se situar em um ponto O a uma mesma distância de todas essas cidades. Sabendo que $(1,73)^2 = 3$, é possível afirmar que a distância entre a central de monitoramento e cada uma das cidades é:

- a) 160 km.
- b) 200 km.
- c) 231 km.
- d) 300 km.
- e) 346 km.

066. (INÉDITA/2024) O trapézio isósceles ABCD é tal que o lado AB é paralelo ao lado CD. Além disso, sabe-se que os lados AC e BD são iguais a 10 cm. Sabendo que o lado AB = 20 cm e que o lado CD = 8 cm, assinale a alternativa que indica a área do trapézio.

- a) 96
- b) 112
- c) 144
- d) 160

067. (INÉDITA/2024) Calcule o perímetro da seguinte figura plana.



- a) 42
- b) 44
- c) 48
- d) 50
- e) 52

GABARITO

- | | | |
|----------------------|-------|-------|
| 1. e | 24. a | 47. a |
| 2. e | 25. a | 48. b |
| 3. c | 26. e | 49. C |
| 4. b | 27. e | 50. e |
| 5. a | 28. e | 51. c |
| 6. E | 29. E | 52. c |
| 7. E | 30. C | 53. a |
| 8. a | 31. a | 54. c |
| 9. E | 32. b | 55. b |
| 10. C | 33. d | 56. C |
| 11. C | 34. c | 57. E |
| 12. c | 35. b | 58. C |
| 13. a | 36. d | 59. C |
| 14. c | 37. c | 60. C |
| 15. C | 38. c | 61. E |
| 16. c | 39. b | 62. C |
| 17. $1000\sqrt{3}$. | 40. a | 63. E |
| 18. b | 41. c | 64. b |
| 19. $\sqrt{720}$. | 42. e | 65. c |
| 20. c | 43. d | 66. b |
| 21. b | 44. d | 67. c |
| 22. d | 45. e | |
| 23. e | 46. b | |

GABARITO COMENTADO

023. (FUNDATEC/CÂMARA DE SÃO MARTINHO DA SERRA/TESOUREIRO/2024) Um retângulo tem lados medindo 2,0 e 2,1 cm. Qual é a medida (em cm) de sua diagonal?

- a) 2,4.
- b) 2,5.
- c) 2,6.
- d) 2,8.
- e) 2,9.



A diagonal consiste na hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são os lados do retângulo, como mostrado na figura a seguir.

A diagonal pode, então, ser calculada pelo Teorema de Pitágoras, que estabelece que:

$$d^2 = 2^2 + (2,1)^2$$

$$d^2 = 4 + 4,41$$

$$d^2 = 8,41$$

Por fim, podemos tirar a raiz quadrada.

$$\therefore d = \sqrt{8,41} = \sqrt{\frac{841}{100}} = \frac{29}{10} = 2,9 \text{ cm}$$

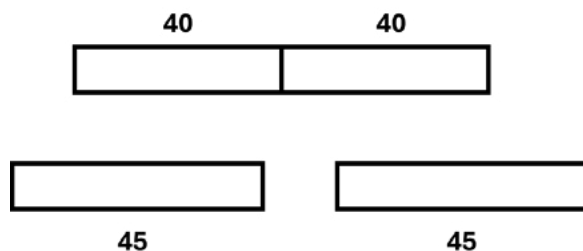
Letra e.

024. (FCC/TRT 22/TÉCNICO JUDICIÁRIO/2022) Com 2 tiras de papel de mesma largura e comprimento é possível formar uma tira de 80 cm de comprimento, sendo que as tiras ficam superpostas 10 cm. Para formar uma tira de 76 cm de comprimento, com essas duas tiras, a proporção de uma tira que ficará sobreposta é:

- a) 14/45.
- b) 7/80.
- c) 7/40.
- d) 11/80.
- e) 28/45.



Façamos uma figura para entender melhor o problema. As duas fitas são sobrepostas 10 cm. Isso significa que 5 cm de cada fita estão escondidos uma sobre a outra.



Desse modo, cada fita tem 45 cm, sendo 5 cm de cada uma delas sobrepostas para totalizar os 80 cm, como mostrado a seguir:



Portanto, a soma dos comprimentos das tiras é de 90 cm. Para que a tira total tenha 76 cm, é preciso que sejam sobrepostos:

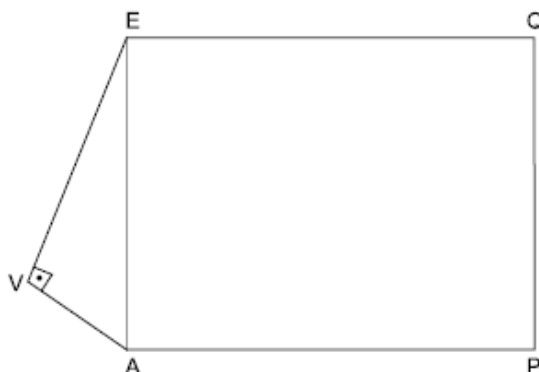
$$\text{Sobrepostos} = 90 - 76 = 14 \text{ cm}$$

De acordo com o enunciado, essa sobreposição será de somente uma das tiras. Portanto, uma tira de 45 cm ficará completa e a outra terá 14 cm sobrepostos. Então, a fração pedida é:

$$p = \frac{\text{Fração Sobreposta}}{\text{Total da Tira}} = \frac{14}{45}$$

Letra a.

025. (VUNESP/FITO/ANALISTA DE GESTÃO/BIBLIOTECA/2020) O polígono AVEQP da figura representa um terreno e não está desenhado em escala. O triângulo EVA é retângulo em V e o quadrilátero EAPQ é um retângulo. As medidas de EV e VA são, respectivamente, iguais a 48 m e 20 m.



Se a medida do lado AP é igual a 75 m, então a área do terreno em m² é igual a:

- a) 4380.
- b) 4575.
- c) 5050.
- d) 5275.
- e) 6125.



Primeiramente, recordemos a fórmula da área de um triângulo:

$$\text{área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Como o triângulo EVA é retângulo, sua área é dada por:

$$\text{área EVA} = \frac{VA \cdot EV}{2} = \frac{20 \cdot 48}{2} = 480 \text{ m}^2$$

Além disso, podemos descobrir o lado EA (e a altura do retângulo EAPQ) pelo Teorema de Pitágoras, que diz que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Assim:

$$EA^2 = EV^2 + VA^2 = 48^2 + 20^2 = 2704 \therefore EA = \sqrt{2704} = 52 \text{ m}$$

Temos então que a área do retângulo EAPQ é:

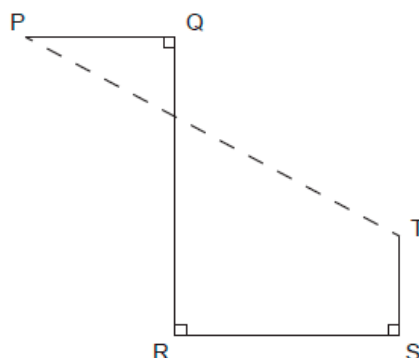
$$\text{área EAPQ} = \text{base} \cdot \text{altura} = AP \cdot EA = 75 \cdot 52 = 3900 \text{ m}^2$$

Somando a área das duas figuras geométricas, obtemos a área total do terreno:

$$\text{área total} = \text{área EVA} + \text{área EAPQ} = 480 + 3900 = 4380 \text{ m}^2$$

Letra a.

026. (CESGRANRIO/IBGE/AGENTE DE PESQUISAS POR TELEFONE/2016) Na Figura a seguir, PQ mede 6 cm, QR mede 12 cm, RS mede 9 cm, e ST mede 4 cm.

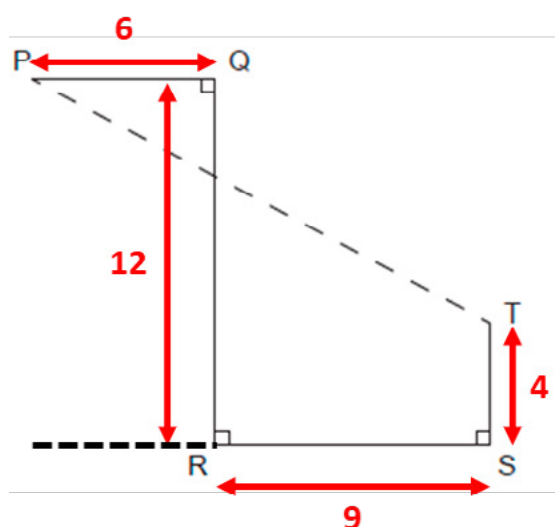


A distância entre os pontos P e T, em cm, mede:

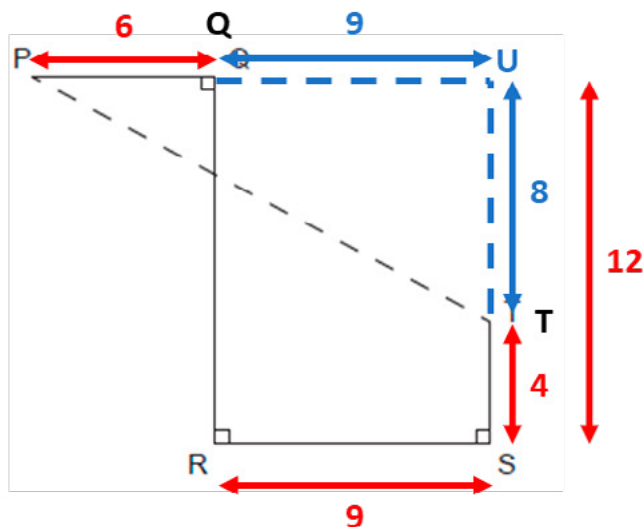
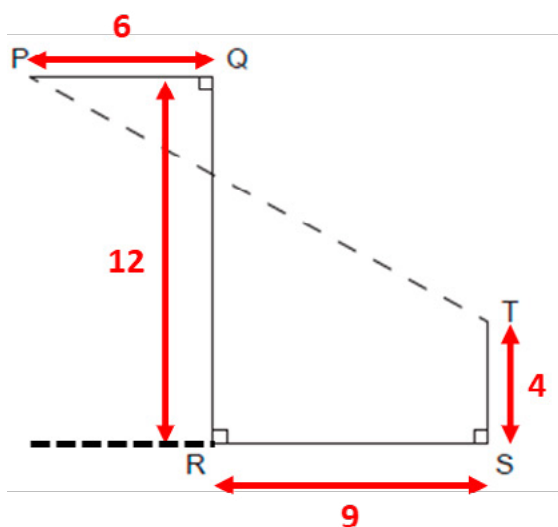
- a) 21
- b) 20
- c) 19
- d) 18
- e) 17



Em primeiro lugar, vamos



A forma mais simples de resolver essa questão é prolongando os segmentos PQ e ST até fechar o triângulo retângulo, criando o vértice U (conforme esquema abaixo):



Note que, com os dados apresentados, podemos deduzir algumas relações:

$$\overline{UT} = \overline{QR} - \overline{TS} = 12 - 4 = 8 \text{ cm}$$

$$\overline{PU} = \overline{PQ} + \overline{QU} = 6 + 9 = 15 \text{ cm}$$

Observe que a distância $\overline{PT}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo UTP, que é retângulo em U, e pode ser calculada pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{PT}^2 = \overline{UT}^2 + \overline{PU}^2$$

$$\overline{PT}^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$$

$$\overline{PT} = \sqrt{289} = 17$$

Letra e.

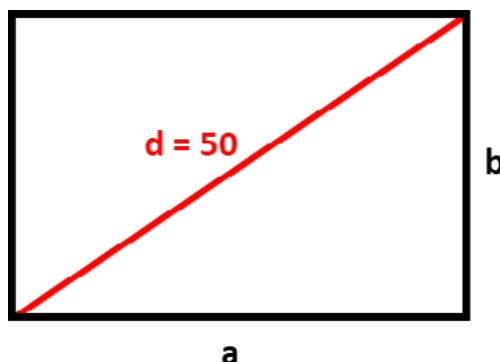
027. (FUNRIO/PREFEITURA DE TRINDADE/PEDAGOGO/2016) As dimensões de um terreno retangular são proporcionais a 3 e 4, e a medida de sua diagonal é igual a 50 m. A área desse terreno, em m², equivale a:

- a) 300
- b) 400
- c) 800
- d) 1000
- e) 1200



Note que a diagonal divide o retângulo em dois triângulos retângulos com as seguintes medidas:

- d = 50 m
- a é proporcional a 4
- b é proporcional a 3



Para descobrir a medida dos catetos, utilizaremos o Teorema de Pitágoras.

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$50^2 = a^2 + b^2 \quad (I)$$

Com as relações de proporcionalidade, colocaremos um cateto em função do outro:

$$\frac{b}{3} = \frac{a}{4}$$

$$\therefore b = \frac{3a}{4} \quad (II)$$

Substituindo II em I, temos:

$$50^2 = a^2 + b^2$$

$$50^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2$$

$$2500 = a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2$$

$$\therefore 2500 = a^2 + \frac{9a^2}{16}$$

Podemos multiplicar tudo por 16

$$2500 \cdot 16 = 16a^2 + 9a^2$$

$$2500 \cdot 16 = 25a^2$$

Resolvendo a equação para a^2 :

$$\therefore a^2 = \frac{2500 \cdot 16}{25} = 100 \cdot 16 = 1600$$

Agora, basta extrair a raiz quadrada:

$$a = \sqrt{1600} = 40 \text{ m}$$

Encontrado o valor de a , substituiremos na equação II:

$$b = \frac{3 \cdot 40}{4} = 30 \text{ m}$$

Como o enunciado solicita a área do terreno retangular e a área do retângulo é igual ao produto das suas dimensões, temos:

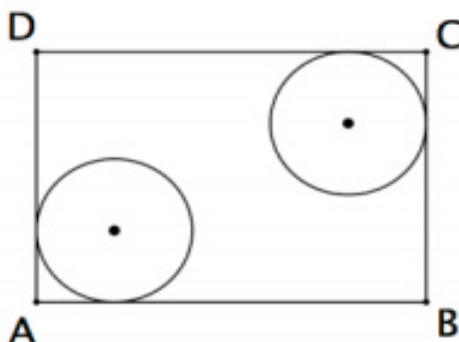
$$S_{\text{terreno}} = a \cdot b$$

$$S_{\text{terreno}} = 40 \cdot 30 = 1200 \text{ m}^2$$

Letra e.

028. (FGV/SEE/PE/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016)

A figura a seguir mostra o retângulo ABCD onde $AB = 10$ e $BC = 7$ e duas circunferências de raio igual a 2. As circunferências são tangentes a dois lados do retângulo.



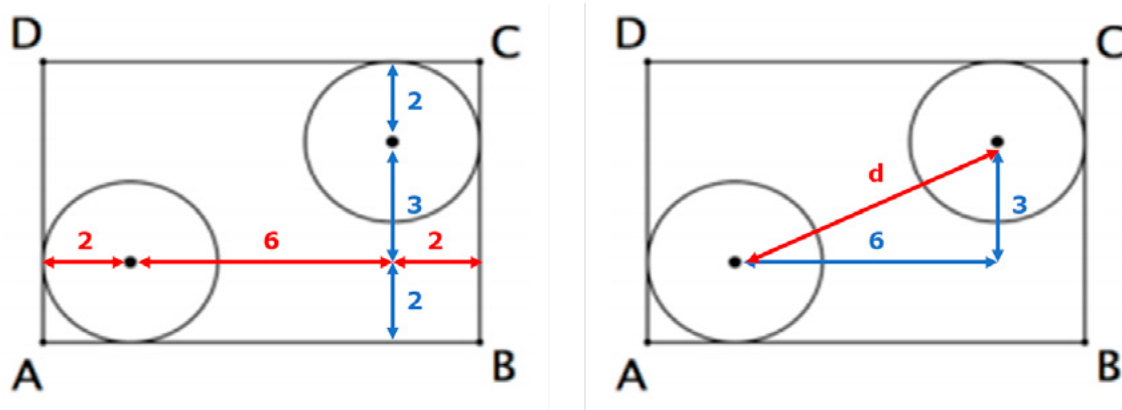
A distância entre os centros dessas duas circunferências é:

- a) $5\sqrt{2}$
- b) $3\sqrt{3}$
- c) $4\sqrt{3}$
- d) $2\sqrt{5}$
- e) $3\sqrt{5}$



Observe que a questão pede a distância entre os centros de duas circunferências dentro de um retângulo. O primeiro passo é traçar uma paralela ao segmento $\overline{AB}$ a partir do centro da circunferência mais próxima ao vértice A e uma perpendicular, saindo do centro da circunferência mais próxima ao vértice C.

A partir de então, é possível verificar que a distância entre os centros corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo de lados 3 e 6.



Portanto, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\therefore d = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$$

Letra e.

029. (CESPE/FUB/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/ADAPTADA/2008) Um quarto de uma casa tem o formato de um retângulo com área igual a 18 metros quadrados e perímetro igual a 20 metros.

A respeito dessa situação, julgue os itens subsequentes:

A medida das diagonais desse retângulo, em metros, não é um número inteiro.



Para entender essa questão, vamos primeiramente anotar as informações dadas. Considere um retângulo com lados a e b . A área do retângulo é igual ao produto de suas dimensões:

$$S_{\text{retângulo}} = a \cdot b = 18 \text{ m}^2 (I)$$

Já o perímetro é igual à soma das dimensões:

$$2p_{\text{retângulo}} = a + b + a + b = 20 \text{ m}$$

$$\therefore 2(a + b) = 20$$

$$\therefore a + b = 10 (II)$$

Note que a diagonal do retângulo é numericamente igual à hipotenusa do triângulo retângulo formado pelos catetos a e b . Então, utilizaremos o Teorema de Pitágoras para descobrir o valor da diagonal.

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Não será necessário calcular a medida dos catetos e, basta lembrar-se do produto notável e, em seu desenvolvimento, substituir as relações dadas no enunciado. Temos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(10)^2 = a^2 + b^2 + 2.18$$

$$100 = (a^2 + b^2) + 36$$

$$100 - 36 = d^2 \therefore d^2 = 64 \therefore d = \sqrt{64} = 8m$$

Errado.

030. (CEBRASPE/PETROBRÁS/GEOFÍSICO/2022) Em um triângulo ABC, tem-se que $AB = \sqrt{3}$, $BC = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/2$ e $\angle ABC = 45^\circ$. Nessa situação, é correto concluir que o lado $AC = \sqrt{2}$.



O lado AC pode ser calculado pela Lei dos Cossenos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\hat{B})$$

Vamos substituir com os dados do enunciado.

$$AC^2 = (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Façamos as contas, expandindo a soma de quadrados e trabalhando os radicais no último termo.

$$AC^2 = 3 + \frac{2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + 6}{4} - \sqrt{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)$$

Vamos fazer as multiplicações dos radicais.

$$AC^2 = 3 + \frac{8 + 2 \cdot \sqrt{12}}{4} - \left(\frac{\sqrt{12} + \sqrt{36}}{2}\right)$$

Veja que $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$. Então, temos:

$$AC^2 = 3 + \frac{8 + 2 \cdot 2\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{2\sqrt{3} + 6}{2} \right)$$

$$AC^2 = 3 + 2 + \sqrt{3} - (\sqrt{3} + 3)$$

Façamos a conta de subtração.

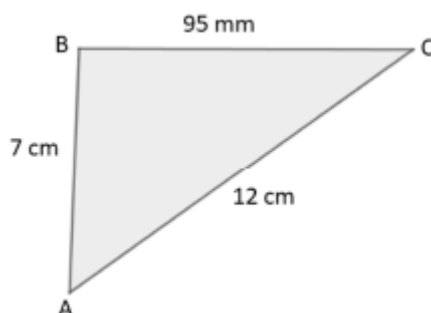
$$AC^2 = 2$$

Extraindo a raiz, temos:

$$\therefore AC = \sqrt{2}$$

Certo.

031. (FCC/PREFEITURA DE MACAPÁ/AP/PROFESSOR ANOS INICIAIS/2018) Uma joaninha e uma formiga partem de um ponto A com destino ao ponto C. A joaninha vai de A até C em linha reta, a formiga vai de A até B em linha reta e, depois, de B até C em linha reta. As distâncias percorridas estão indicadas na figura.



Nos percursos totais das duas, a distância percorrida pela formiga foi maior que a percorrida pela joaninha em

- a) 37,5%.
- b) 32%.
- c) 36,5%.
- d) 36%.
- e) 32,5%.



Primeiro, precisamos calcular as duas distâncias:

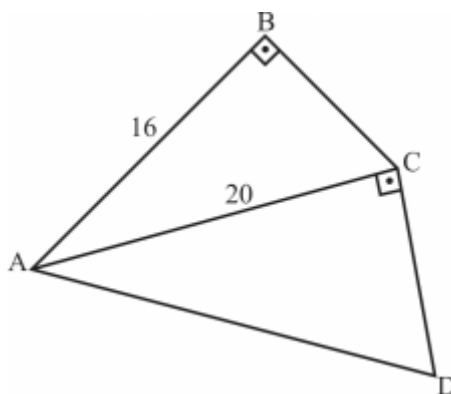
- Joaninha = AC = 12cm
- Formiga = AB + BC = 7cm + 0,95mm = 7cm + 9,5cm = 16,5cm

Logo, a diferença percentual entre elas foi de:

$$\text{diferença} = \frac{16,5 - 12}{12} = 0,375 = 37,5\%$$

Letra a.

032. (CESPE/IFF/CONHECIMENTOS GERAIS/2018) No polígono ABCD da figura precedente, os triângulos ABC e ACD são semelhantes e retângulos — nos vértices B e C, respectivamente. Além disso, AB = 16 cm, AC = 20 cm e CD é o lado menor do triângulo ACD. Nessa situação, AD mede



- a) 24 cm.
- b) 25 cm.
- c) 28 cm.
- d) 32 cm.
- e) 36 cm.



Como os triângulos são semelhantes, podemos fazer a seguinte relação:

$$\frac{\text{maior cateto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{maior cateto}}{\text{hipotenusa}}$$

Assim, temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$$

Note que foram relacionados os maiores catetos de cada triângulo, AB e AC, com as hipotenusas, AC e AD, respectivamente.

Logo, substituindo os valores, temos:

$$\frac{16}{20} = \frac{20}{AD}$$

$$AD = \frac{20 \cdot 20}{16}$$

$$AD = \frac{400}{16}$$

$$\therefore AD = 25 \text{ cm.}$$

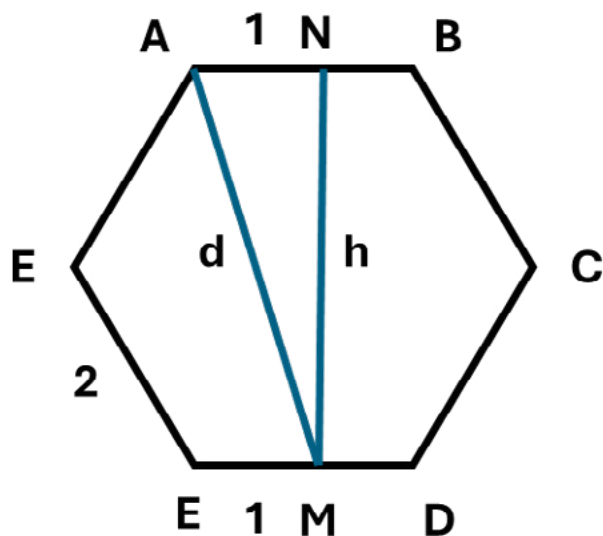
Letra b.

033. (FGV/PREFEITURA DE JABOATÃO DOS GUARARAPES/PROFESSOR/2023) Seja $ABCDEF$ um hexágono regular convexo de lados medindo 2 cm, com os vértices A e D ; B e E ; C e F sendo pares opostos. Seja ainda M o ponto médio do lado DE . A medida do segmento AM , em centímetros, é a raiz quadrada de

- a) 3.
- b) 7.
- c) 13.
- d) 15.
- e) 21.



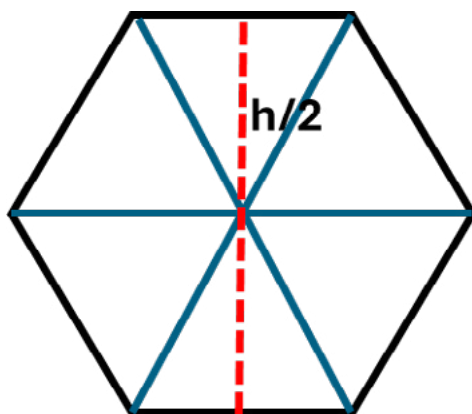
Primeiramente, vamos representar a situação pedida no problema.



Vamos calcular os ângulos internos de um hexágono regular, usando as expressões:

$$\alpha_6 = \frac{N - 2}{N} \cdot 180^\circ = \left(\frac{6 - 2}{6}\right) \cdot 180^\circ = \frac{4}{6} \cdot 180^\circ = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$$

Por esse motivo, o hexágono regular pode ser fracionado em seis triângulos equiláteros, de modo que sua altura pode ser calculada com mais facilidade. Vejamos:



A altura de um triângulo equilátero pode ser calculada diretamente pelo seno do ângulo de 60° .

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\text{altura}}{\text{lado}}$$

Como o lado do triângulo é igual a 2 e a altura é igual a $h/2$, podemos escrever:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{2}$$

$$\therefore h = 2\sqrt{3}$$

Por fim, podemos utilizar o teorema de Pitágoras no triângulo ANM, notando que o ângulo ANM no vértice N é igual a 90° . Portanto, a hipotenusa AM pode ser calculada como:

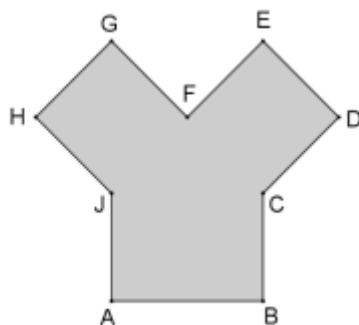
$$AM^2 = AN^2 + NM^2$$

$$AM^2 = 1^2 + (2\sqrt{3})^2 = 1 + 4 \cdot 3 = 1 + 12 = 13$$

Portanto, AM é igual à raiz quadrada de 13.

Letra d.

034. (FGV/PREFEITURA DE NITERÓI/ARQUITETO/2023) O polígono abaixo é a planta de um salão desenhado por um arquiteto. Os ângulos AJH e BCD medem 135° cada e todos os outros ângulos formados por dois lados consecutivos são retos. Com exceção do segmento AB, todos os outros lados do polígono medem 10m.

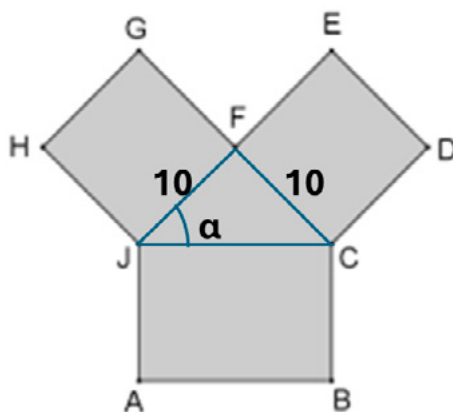


Considerando $\sqrt{2} = 1,41$, a área desse salão em metros quadrados é

- a) 350.
- b) 382.
- c) 391.
- d) 405.
- e) 414.



Podemos dividir o salão em quatro partes, sendo um retângulo, dois quadrados e um triângulo.



Podemos calcular o ângulo α , notando que as somas dos ângulos em torno de J devem somar 360° .

$$135^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \alpha = 360^\circ$$

$$315^\circ + \alpha = 360^\circ$$

$$\therefore \alpha = 360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$$

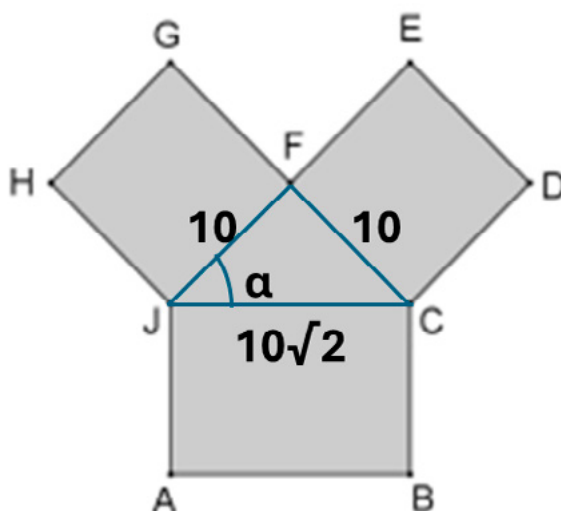
Portanto, os ângulos FJC e FCJ são ambos iguais a 45° . Com isso, podemos concluir que o ângulo JFC é igual a 90° , portanto, o triângulo FJC é retângulo, com ângulo reto em F, tendo o lado JC como sua hipotenusa. Desse modo, o comprimento JC pode ser calculado pelo Teorema de Pitágoras:

$$JC^2 = 10^2 + 10^2$$

$$JC^2 = 100 + 100 = 200$$

$$\therefore JC = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

Então, podemos calcular a área do salão como sendo a soma da área do retângulo ABCJ, do triângulo FJC e dos quadrados GFHJ e DEFC.



$$S_{ABCJ} = base \cdot altura = 10\sqrt{2} \cdot 10 = 100\sqrt{2} = 100 \cdot 1,41 = 141$$

$$S_{FJC} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$$

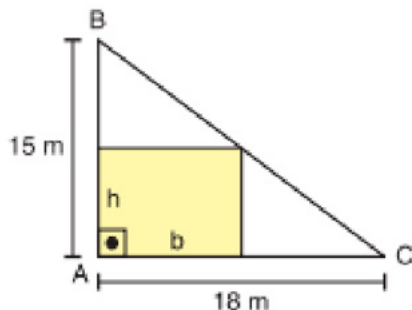
$$S_{GFHJ} = S_{DEFC} = lado^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

Portanto, a área total do salão é:

$$S = 141 + 50 + 2 \cdot 100 = 141 + 50 + 200 = 391$$

Letra c.

035. (CRESCER CONSULTORIAS/PREFEITURA DE JIJOCA DE JERICOACOARA CE/PROFESSOR EDUCAÇÃO BÁSICA I/2019) O projeto de uma casa popular vai ocupar uma região retangular, de dimensões b e h , em um terreno triangular, de acordo com a figura a seguir:

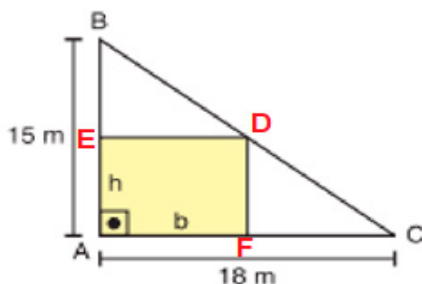


O terreno é um triângulo retângulo, e um dos vértices da região retangular da casa está sobre o maior lado desse triângulo. Assim, podemos afirmar que:

- A casa pode ser construída com dimensões $b = 9$ m e $h = 7$ m.
- A casa pode ser construída com $b = 3$ m e $h = 12,5$ m.
- As dimensões $h = 6$ m e $b = 10$ m vão determinar a maior medida da área possível para a casa.
- É possível construir uma casa cujas dimensões sejam $b = 18$ m e $h = 15$ m.



Para resolvermos, basta usar semelhança de triângulos. Considere a figura a seguir, com inserção de alguns pontos



Fazendo semelhança entre os triângulos ABC e DFC, temos:

$$\frac{h}{15} = \frac{18 - b}{18}$$

$$18h = 15 \cdot (18 - b)$$

$$18h = -15b + 15 \cdot 18$$

$$18h = -15b + 270$$

$$\therefore 15b = 270 - 18h$$

a) Errada. Substituindo os valores, temos:

$$15 \cdot 9 = 270 - 18 \cdot 7$$

$$135 = 270 - 18 \cdot 7$$

$$135 = 270 - 126$$

$$135 = 144$$

b) Certa. Substituindo os valores, temos:

$$15 \cdot 3 = 270 - 18 \cdot 12,5$$

$$45 = 270 - 225$$

$$45 = 45$$

c) Errada. Substituindo os valores, temos:

$$15 \cdot 10 = 270 - 18 \cdot 6$$

$$150 = 270 - 18 \cdot 6$$

$$150 = 270 - 108$$

$$150 = 162$$

d) Errada. Substituindo os valores, temos:

$$15 \cdot 18 = 270 - 18 \cdot 15$$

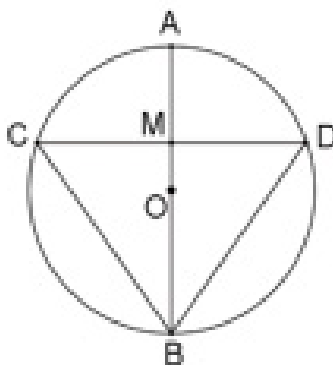
$$270 = 270 - 18 \cdot 15$$

$$270 = 270 - 270$$

$$270 = 0$$

Letra b.

036. (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR/BA/PROFESSOR/MATEMÁTICA/2019) A figura a seguir mostra uma circunferência de centro O, um diâmetro AB e uma corda CD, perpendicular em M ao segmento AB.

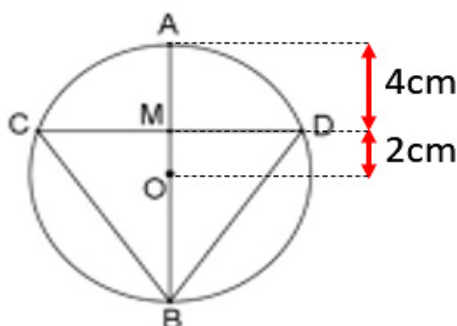


Sabe-se que $OM = 2 \text{ cm}$ e que $MA = 4 \text{ cm}$. A área em cm^2 do triângulo BCD é:

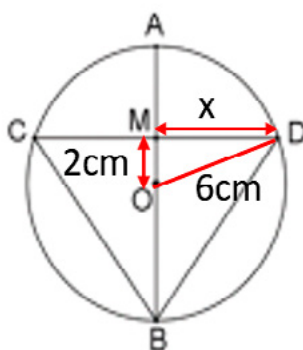
- a) $16\sqrt{2}$.
- b) $18\sqrt{2}$.
- c) $24\sqrt{2}$.
- d) $32\sqrt{2}$.
- e) $36\sqrt{2}$.



Observe a figura.



Note que o raio da circunferência vale 6 cm . Logo, se puxarmos uma reta entre O e D, teremos também um raio da circunferência. Dessa forma, $OD = 6 \text{ cm}$. Observe o triângulo formado.



Precisamos descobrir qual o valor do outro cateto, indicado como x . Para isso, basta utilizar a fórmula de Pitágoras:

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2$$

$$6^2 = 2^2 + x^2 \rightarrow 36 = 2^2 + x^2$$

$$36 = 4 + x^2$$

$$x^2 = 32$$

$$\therefore x = \sqrt{32} \text{ cm}$$

Relembrando a fórmula da área de triângulos:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Agora, segundo os dados do problema, temos que a base do triângulo será 2 vezes o valor de x . Além disso, a altura do triângulo será a reta MB, que vale $(6 + 2) \text{ cm}$. Logo:

$$\text{Área} = \frac{2 \cdot \sqrt{32} \cdot (6 + 2)}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{2 \cdot \sqrt{32} \cdot 8}{2}$$

$$\text{Área} = 8\sqrt{32} = 8\sqrt{4^2 \cdot 2} = 8 \cdot 4\sqrt{2} = 32\sqrt{2} \text{ cm}$$

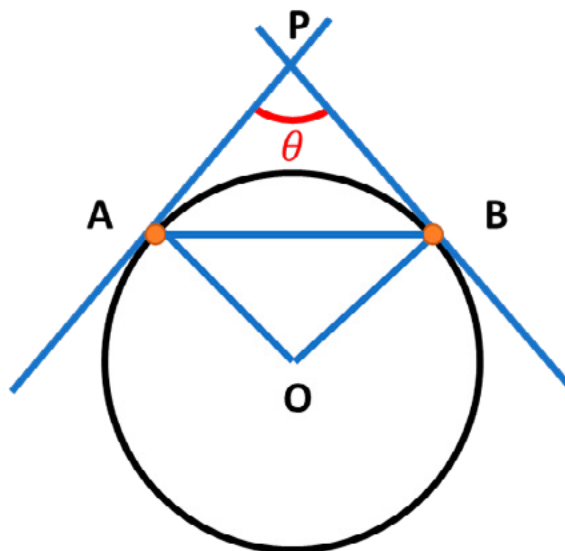
Letra d.

037. (EEAR/CONTROLADOR DE TRÁFEGO AÉREO/2023) Sejam os pontos A e B pertencentes a uma mesma circunferência λ , pelos quais são traçadas duas retas tangentes a λ e não paralelas entre si. Se a corda AB é o lado de um eneágono regular inscrito em λ , o ângulo obtuso formado pelas referidas retas mede ____.

- a) 100°
- b) 120°
- c) 140°
- d) 160°



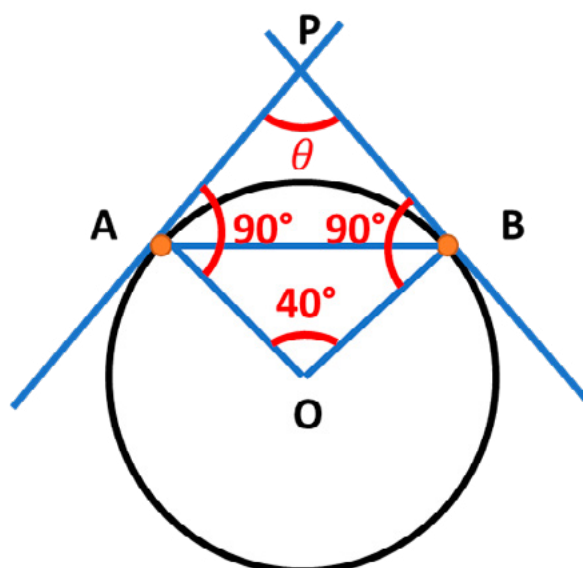
Vamos desenhar a situação tratada na questão.



Sabemos que a corda AB é o lado de eneágono (polígono de 9 lados). Por outro lado, o ângulo AOB é o ângulo central desse polígono. Como o eneágono tem 9 lados, esse ângulo central divide a circunferência em 9 partes. Portanto, esse ângulo central corresponde a $\frac{1}{9}$ do ângulo de 360° .

$$AOB = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

Além disso, os ângulos OAP e OBP são ângulos entre o raio da circunferência e a reta tangente. Matematicamente, a reta tangente é sempre perpendicular ao raio da circunferência no ponto de tangência. Então, ambos os ângulos OAP e OBP são iguais a 90° .



Por fim, podemos notar o quadrilátero OABP, cuja soma dos ângulos internos deve ser igual a 360° . Então, podemos escrever:

$$90^\circ + 90^\circ + 40^\circ + \theta = 360^\circ$$

$$220^\circ + \theta = 360^\circ$$

$$\therefore \theta = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

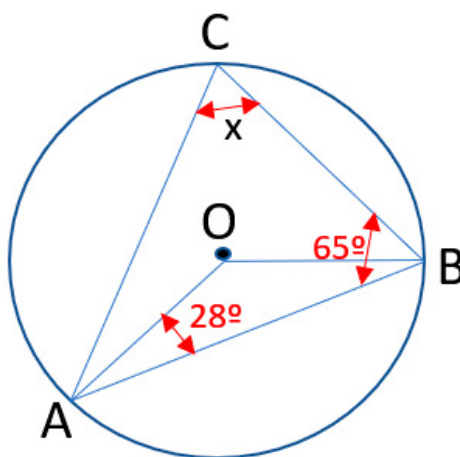
Letra c.

038. (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR/BA/PROFESSOR/MATEMÁTICA/2019) O triângulo ABC está inscrito na circunferência de centro O. O ângulo OAB mede 28° e o ângulo ABC mede 65° . O ângulo ACB mede:

- a) 58° .
- b) 60° .
- c) 62° .
- d) 64° .
- e) 66° .



Pelo enunciado, temos:



Temos também que o triângulo OAB é isósceles, por possui dois lados iguais ao raio da circunferência (lado AO e lado OB). Assim, o ângulo OAB é igual ao ângulo OBA que é igual a 28° .

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , o ângulo AOB é:

$$\widehat{OAB} + \widehat{OBA} + \widehat{AOB} = 180^\circ$$

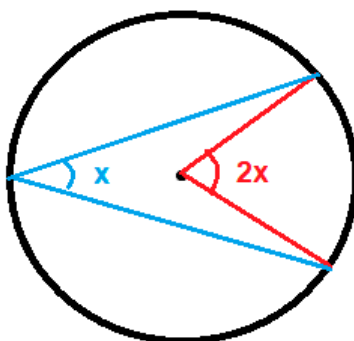
$$28 + 28 + \widehat{AOB} = 180^\circ$$

$$56 + \widehat{AOB} = 180^\circ$$

$$\therefore \widehat{AOB} = 124^\circ$$

Agora basta relembrar de outra propriedade de triângulos inscritos dentro de uma circunferência.

Quando o arco de circunferência formado por um ângulo central é igual ao arco de outro ângulo inscrito na circunferência, então o ângulo inscrito será a metade do ângulo central. Observe a figura abaixo.



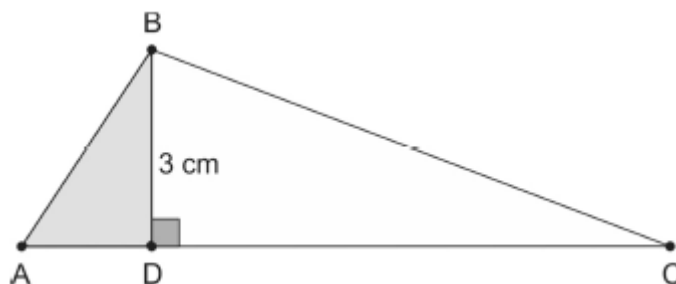
Logo, ACB é a metade de 124, ou seja:

$$\widehat{ACB} = \frac{124}{2} = 62^\circ$$

Letra c.

039. (FCC/PREFEITURA DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO/SP/AGENTE COMUNITÁRIO DE SAÚDE/2019)

Em um triângulo ABC a altura BD relativa ao lado AC mede 3 cm, conforme mostra a figura.

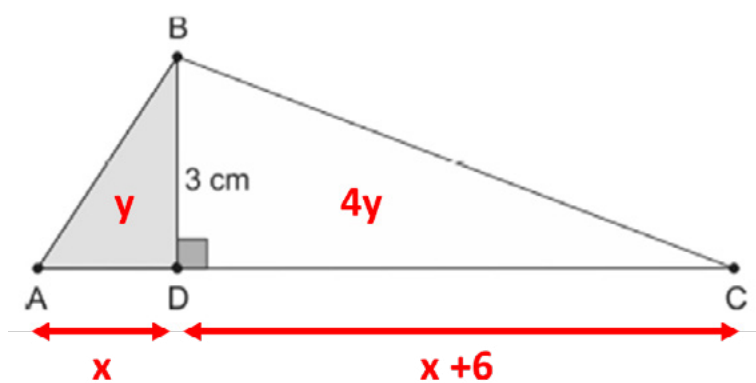


Sabendo que o segmento CD é 6 cm maior que o segmento AD e que a área do triângulo BCD é o quádruplo da área do triângulo ABD, a área do triângulo ABC, em cm², é:

- a) 12
- b) 15
- c) 18
- d) 21
- e) 24



Considerando y como a área do triângulo ABD e x como a distância AD, temos:



A área de um triângulo é dada pela famosa expressão: base vezes altura dividido por 2.

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

No caso de um triângulo retângulo, ela fica simplesmente igual ao produto dos catetos. Assim, para o triângulo ABD, teremos:

$$y = \frac{x \cdot 3}{2} = 1,5x \quad (I)$$

Para o triângulo BDC, também retangular, temos:

$$4y = \frac{(x + 6) \cdot 3}{2}$$

$$4y = 1,5 \cdot (x + 6) \quad (II)$$

Já havíamos calculado a relação entre y e x na equação (I), então, podemos escrever:

$$4 \cdot (1,5x) = 1,5(x + 6)$$

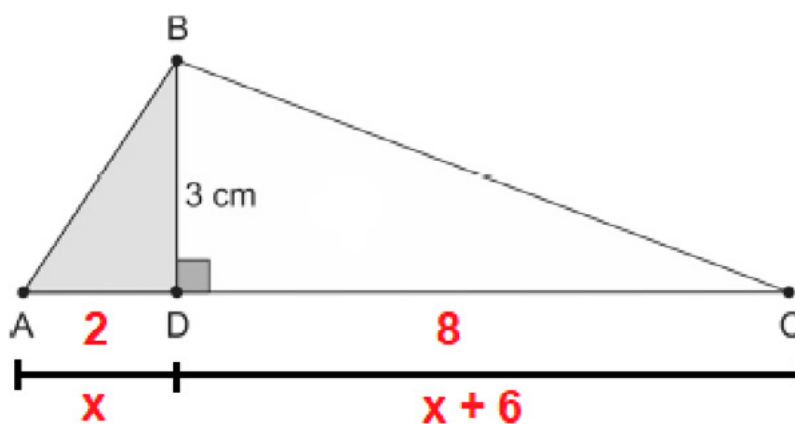
$$4 \cdot x = x + 6$$

$$4x - x = 6$$

$$3x = 6$$

$$\therefore x = 2 \text{ cm}$$

Assim, a área do triângulo ABC é:



$$\text{Área} = \frac{(2 + 8) \cdot 3}{2}$$

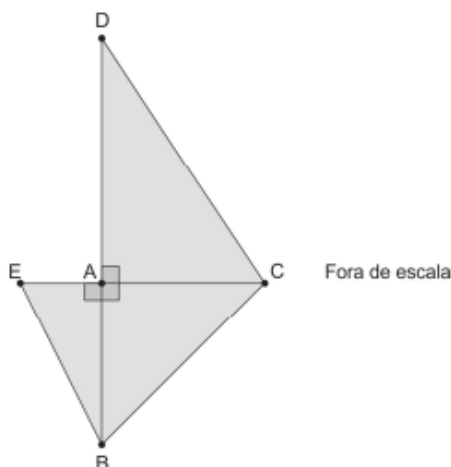
$$\text{Área} = \frac{10 \cdot 3}{2}$$

$$\text{Área} = 5 \cdot 3$$

$$\therefore \text{Área} = 15 \text{ cm}^2$$

Letra b.

040. (FCC/PREFEITURA DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO/SP/AGENTE FISCAL DE POSTURAS/2019)
Os triângulos retângulos ABC, ABE e ACD, da figura abaixo, têm o vértice A em comum; o triângulo ABC é isósceles e tem área 8 cm^2 , e o segmento CE mede 6 cm .



Sabendo que a área do triângulo ACD é o quádruplo da área do triângulo ABE, a medida, em cm, do segmento AD é:

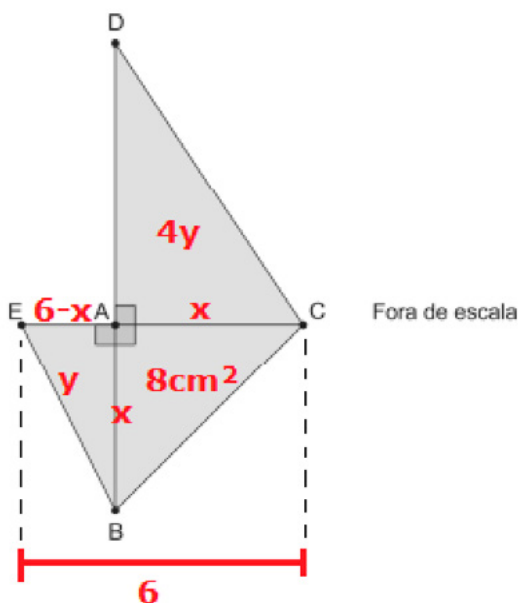
- a) 8
- b) 12
- c) 16
- d) 20
- e) 24



Relembrando a fórmula da área de triângulos:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Agora, segundo os dados do problema, temos:



Pela área do triângulo ABC, descobrimos x:

$$8 = \frac{x \cdot x}{2}$$

$$8 = \frac{x^2}{2}$$

$$16 = x^2$$

$$\therefore x = 4 \text{ cm}$$

Logo, o triângulo EAB tem área:

$$y = \frac{(6 - x) \cdot x}{2}$$

$$y = \frac{(6 - 4) \cdot 4}{2}$$

$$y = \frac{2 \cdot 4}{2}$$

$$\therefore y = 4 \text{ cm}^2$$

Por fim, analisando o triângulo ADC e considerando o lado AD como z, temos:

$$4y = \frac{z \cdot x}{2}$$

$$4 \cdot (4) = \frac{z \cdot (4)}{2}$$

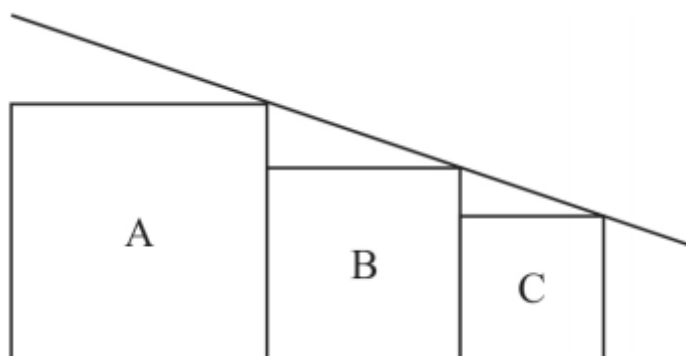
$$16 = \frac{z \cdot 4}{2}$$

$$32 = 4z$$

$$\therefore z = 8 \text{ cm}$$

Letra a.

041. (CESPE/SEFAZ/RS/AUDITOR FISCAL DA RECEITA ESTADUAL/2019) Os quadrados A, B e C foram colocados lado a lado, de modo que uma reta contém os três vértices superiores, como mostra a figura a seguir.



Se a área do quadrado A for 24 cm^2 , e a área do quadrado C for 6 cm^2 , então a área do quadrado B será igual a

- a) 9 cm^2 .
- b) 10 cm^2 .
- c) 12 cm^2 .
- d) 15 cm^2 .
- e) 18 cm^2 .



Observe que se trata de um problema de proporcionalidade entre triângulos. Calculando os lados dos quadrados A e C, temos:

$$\text{Área} = L^2 \quad (I)$$

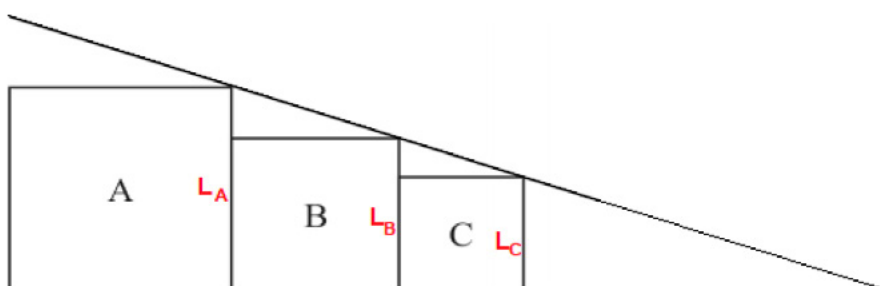
$$L = \sqrt{\text{Área}}$$

Então:

$$L_A = \sqrt{\text{Área}_A} \therefore L_A = \sqrt{24} \text{ cm}$$

$$L_C = \sqrt{\text{Área}_C} \therefore L_C = \sqrt{6} \text{ cm}$$

Fazendo um prolongamento da reta é possível observar melhor a situação:



Assim, temos uma relação de proporcionalidade entre os lados dos quadrados, com K sendo uma constante de proporcionalidade.

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{L_B}{L_C} = K$$

Resolvendo, temos:

$$\frac{\sqrt{24}}{L_B} = \frac{L_B}{\sqrt{6}}$$

$$L_B^2 = \sqrt{24} \cdot \sqrt{6}$$

$$L_B^2 = \sqrt{144}$$

$$L_B^2 = 12$$

$$\therefore L_B = \sqrt{12} \text{ cm}$$

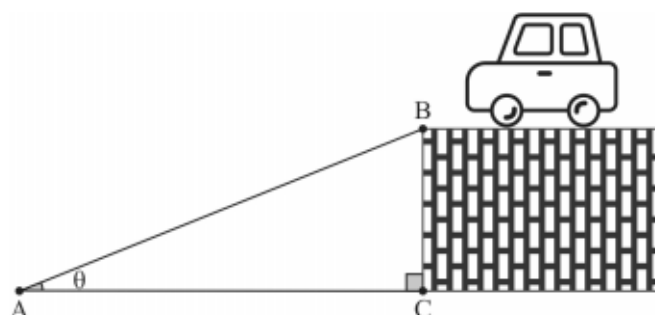
Voltando à equação (I), temos:

$$\text{Área} = L^2 \rightarrow \text{Área} = \sqrt{12}^2$$

$$\therefore \text{Área} = 12 \text{ cm}^2$$

Letra c.

042. (CESPE/SEFAZ/RS/AUDITOR FISCAL DA RECEITA ESTADUAL/2019) Para construir uma rampa de acesso a uma garagem, foi feito um projeto conforme a figura a seguir.



No projeto, a rampa é a hipotenusa AB do triângulo retângulo ABC. A altura da rampa, representada pelo cateto BC, deverá medir 2 m. A distância AC, representada pelo outro cateto do triângulo, deverá ser tal que a inclinação da rampa, dada pelo ângulo θ no vértice A, não seja superior a 30° .

Nessa situação, sabendo-se que $\text{tg } 30^\circ = \sqrt{3}/3$, o comprimento do cateto AC, em metros, deverá ser tal que:

- a) $AC < \sqrt{3}/4$.
- b) $\sqrt{3}/4 \leq AC < \sqrt{3}/2$.
- c) $\sqrt{3}/2 \leq AC < \sqrt{3}$.
- d) $\sqrt{3} \leq AC < 2\sqrt{3}$.
- e) $AC \geq 2\sqrt{3}$.



Primeiro, devemos calcular qual seria a tangente da rampa. Sabe-se que:

$$\text{tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

A tangente da rampa deverá ser menor ou igual que a tangente de 30° . Logo:

$$\frac{BC}{AC} \leq \text{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{AC} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{6}{\sqrt{3}} \leq AC$$

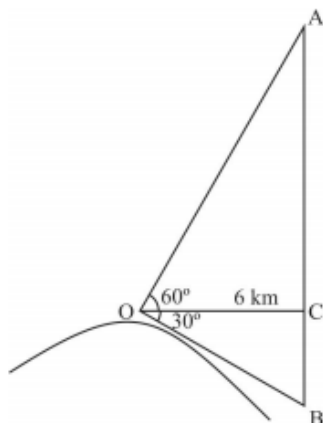
$$\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \leq AC$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{3} \leq AC$$

$$\therefore 2\sqrt{3} \leq AC \text{ ou } AC \geq 2\sqrt{3}$$

Letra e.

043. (CESPE/SEFAZ/RS/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO FAZENDÁRIO/2018) O esquema a seguir mostra um observador no ponto O, que representa o cume de uma montanha, e um avião no ponto A, à altura AB do solo. O ponto C, no segmento AB, está a 6 km desse observador.



O observador enxerga o avião sob um ângulo de 60° com a horizontal OC e o ponto B, no solo, sob um ângulo de 30° com a mesma horizontal.

Admitindo-se 0,57 e 1,73 como valores aproximados para $\text{tg } 30^\circ$ e $\text{tg } 60^\circ$, respectivamente, é correto afirmar que a altura AB do avião é

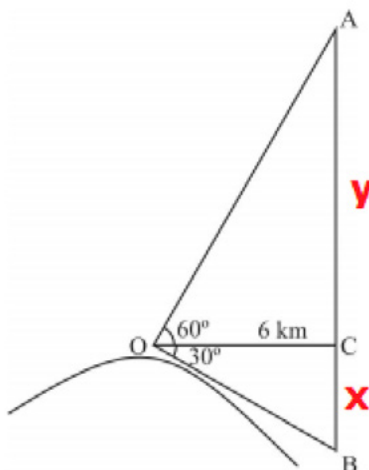
- a) inferior a 8 km.
- b) superior a 8 km e inferior a 10 km.
- c) superior a 10 km e inferior a 12 km.
- d) superior a 12 km e inferior a 14 km.
- e) superior a 14 km.



Primeiramente, lembre a fórmula de tangente:

$$\text{tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Agora considere os seguintes trechos como x e y:



Aplicando as fórmulas de tangente, temos:

- Trecho AC

$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{y}{6} = 1,73$$

$$y = 1,73 \cdot 6$$

$$\therefore y = 10,38 \text{ km}$$

- Trecho CB

$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{x}{6} = 0,57$$

$$y = 0,57 \cdot 6$$

$$\therefore y = 3,42 \text{ km}$$

Logo, o trecho AB será:

$$AB = AC + CB$$

$$AB = 10,38 + 3,42$$

$$\therefore AB = 13,9 \text{ km}$$

Assim, o trecho é superior a 12km e inferior a 14km.

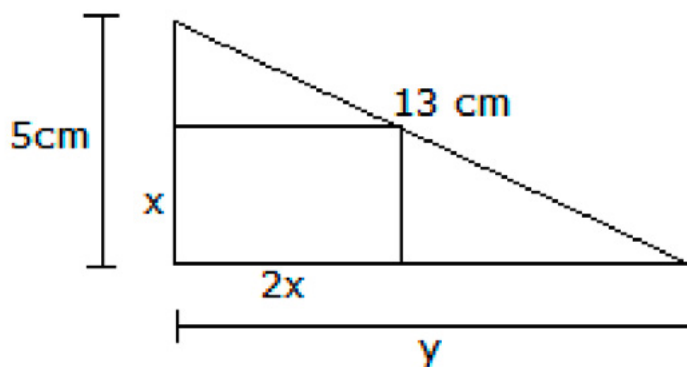
Letra d.

044. (CESPE/SEFAZ/RS/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2018) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 13 centímetros e um dos catetos mede 5 centímetros. Nesse triângulo, considere o retângulo inscrito, em que o comprimento do lado maior é igual ao dobro do comprimento do lado menor, e um dos lados maiores está sobre o cateto maior do triângulo. Com base nessas informações, é correto afirmar que a área desse retângulo é igual a:

- 11250/529 cm².
- 3600/289 cm².
- 3600/49 cm².
- 1800/121 cm².
- 1800 cm².



Primeiramente, considere a seguinte figura representativa do problema.



Precisamos descobrir qual a medida do outro cateto. Para isso, basta utilizar o Teorema de Pitágoras:

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2$$

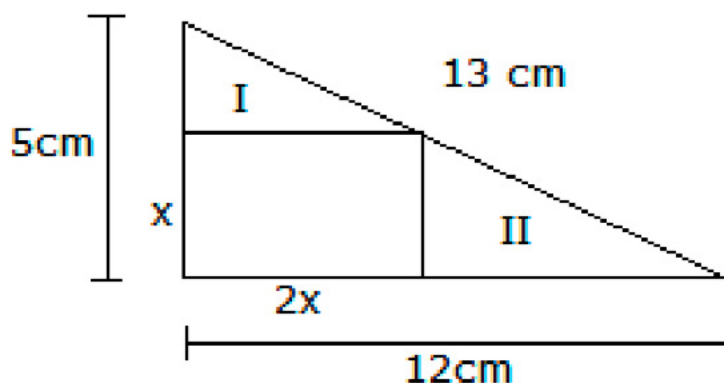
$$13^2 = 5^2 + y^2 \rightarrow 169 = 5^2 + y^2$$

$$169 = 25 + y^2$$

$$y^2 = 144 \rightarrow y = \sqrt{144}$$

$$\therefore y = 12m$$

A seguir, podemos utilizar a semelhança de triângulos:



Para encontrar x , poderíamos fazer semelhança com o triângulo I ou II. Escolheremos o triângulo I.

- Triângulo I:

$$\frac{5-x}{2x} = \frac{5}{12} \rightarrow \frac{5-x}{x} = \frac{5}{6}$$

$$(5-x) \cdot 6 = 5x$$

$$30 - 6x = 5x$$

$$30 = 11x$$

$$\therefore x = \frac{30}{11}$$

Por fim, a área do retângulo é dada pelo produto de suas dimensões:

$$\text{Área} = \text{comprimento} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Área} = 2x \cdot x$$

$$\text{Área} = 2x^2$$

$$\text{Área} = 2 \cdot \left(\frac{30}{11}\right)^2$$

$$\text{Área} = 2 \cdot \frac{30^2}{11^2}$$

$$\text{Área} = 2 \cdot \frac{900}{121}$$

$$\therefore \text{Área} = \frac{1800}{121}$$

Letra d.

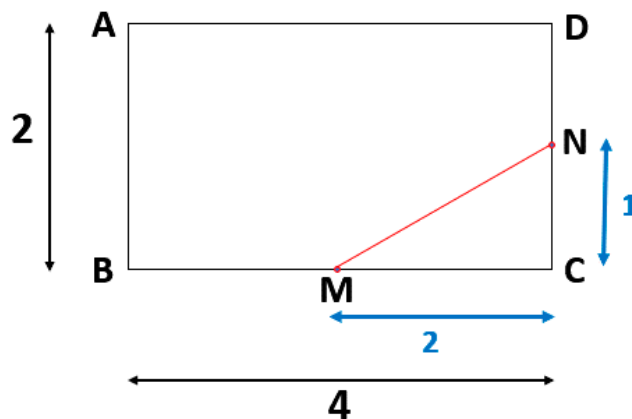
045. (FGV/AL/RO/ANALISTA LEGISLATIVO/2018) O retângulo ABCD tem dimensões AB = 2 e BC = 4. Os pontos M e N são médios dos lados BC e CD, respectivamente.

O cosseno do ângulo AMN é igual a

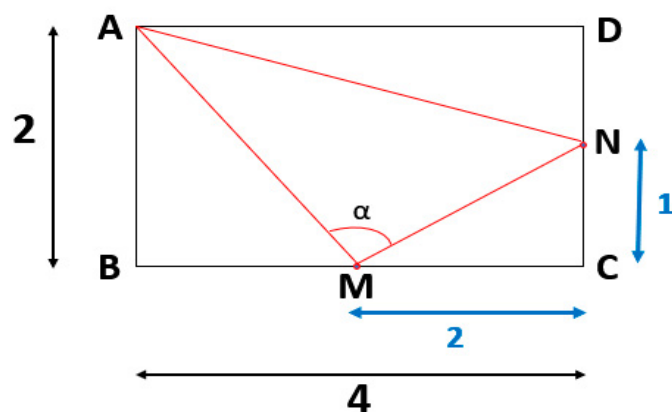
- a) $-1/\sqrt{3}$.
- b) $1/\sqrt{5}$.
- c) $-1/\sqrt{5}$.
- d) $1/\sqrt{10}$.
- e) $-1/\sqrt{10}$.



Pelo enunciado, temos a seguinte figura:



Construindo um triângulo com AMN, temos:



Vamos encontrar cada lado do triângulo AMN:

1 - LADO MN:

$$MN^2 = MC^2 + NC^2$$

$$MN^2 = 2^2 + 1^2$$

$$MN^2 = 4 + 1$$

$$MN^2 = 5$$

$$\therefore MN = \sqrt{5}$$

2 - LADO AM:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2$$

$$AM^2 = 2^2 + 2^2$$

$$AM^2 = 4 + 4$$

$$AM^2 = 8$$

$$\therefore AM = \sqrt{8}$$

3 - LADO AN:

$$AN^2 = AD^2 + DN^2$$

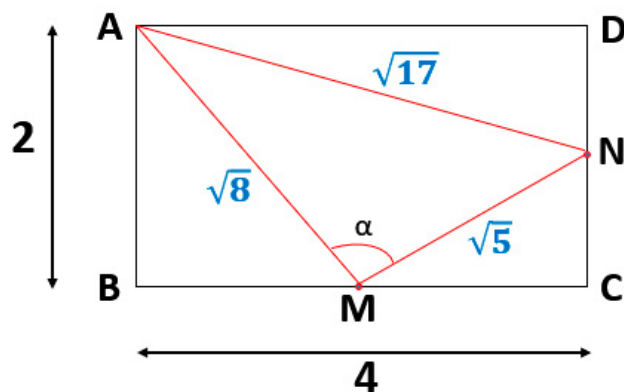
$$AN^2 = 4^2 + 1^2$$

$$AN^2 = 16 + 1$$

$$AN^2 = 17$$

$$\therefore AN = \sqrt{17}$$

Assim, obtemos a seguinte figura:



Agora, basta lembrar da lei dos cossenos:

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos(\hat{X})$$

Substituindo os dados do problema, temos:

$$AN^2 = AM^2 + MN^2 - 2 \cdot AM \cdot MN \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sqrt{17}^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{5}^2 - 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(\alpha)$$

$$17 = 8 + 5 - 2 \cdot \sqrt{8 \cdot 5} \cdot \cos(\alpha)$$

$$17 = 13 - 2 \cdot \sqrt{8 \cdot 5} \cdot \cos(\alpha)$$

$$4 = -2 \cdot \sqrt{8 \cdot 5} \cdot \cos(\alpha)$$

$$4 = -2 \cdot \sqrt{40} \cdot \cos(\alpha)$$

Podemos, agora, simplificar o número dentro da raiz quadrada:

$$2 = -\sqrt{4 \cdot 10} \cdot \cos(\alpha)$$

$$2 = -\sqrt{2^2 \cdot 10} \cdot \cos(\alpha)$$

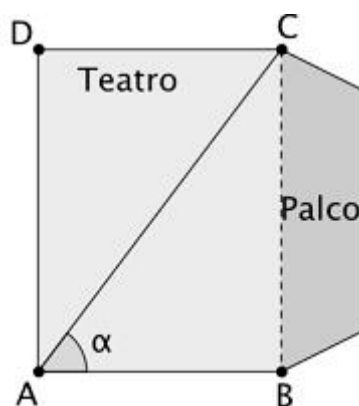
$$2 = -2 \cdot \sqrt{10} \cdot \cos(\alpha)$$

$$1 = -\sqrt{10} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\therefore \cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Letra e.

046. (FGV/FUNARTE/ASSISTENTE FINANCEIRO/2014) A plateia de um teatro, vista de cima para baixo, ocupa o retângulo ABCD da figura a seguir, e o palco é adjacente ao lado BC. As medidas do retângulo são AB = 15m e BC = 20m.



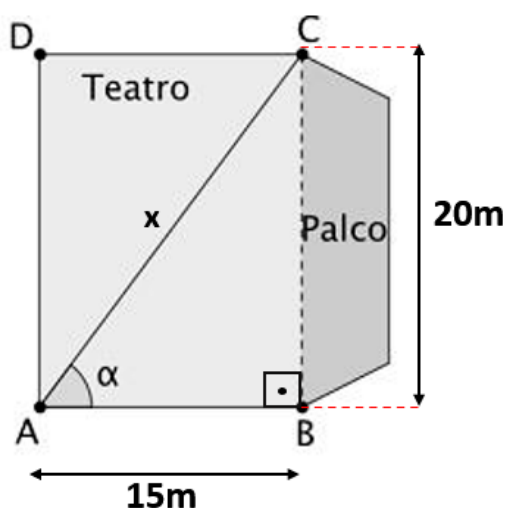
Um fotógrafo que ficará no canto A da plateia deseja fotografar o palco inteiro e, para isso, deve conhecer o ângulo da figura para escolher a lente de abertura adequada.

O cosseno do ângulo da figura acima é:

- a) 0,5;
- b) 0,6;
- c) 0,75;
- d) 0,8;
- e) 1,33.



Pelo enunciado, temos a seguinte figura:



Note que é formado um triângulo cujos catetos são 15m e 20m. Para obter o valor x da hipotenusa desse triângulo, basta usarmos o Teorema de Pitágoras.

$$x^2 = 15^2 + 20^2$$

$$x^2 = 225 + 400$$

$$x^2 = 625$$

$$\therefore x = \sqrt{625} = 25$$

Agora, basta aplicarmos a fórmula do cosseno:

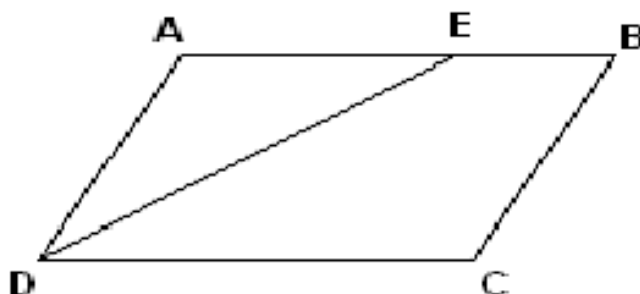
$$\text{Cosseno}(\alpha) = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

Onde o cateto adjacente é o AB e a hipotenusa é o x encontrado. Assim:

$$\text{Cosseno}(\alpha) = \frac{15}{25} = 0,6$$

Letra b.

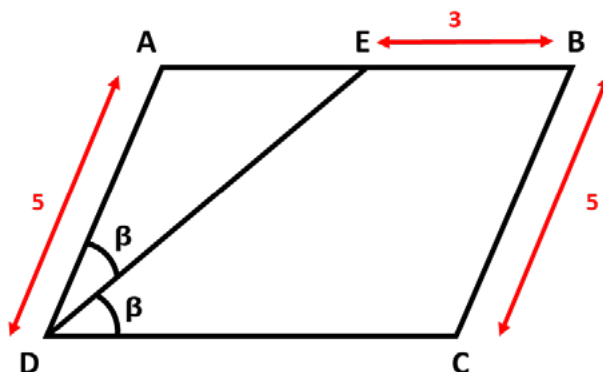
047. (FUNRIO/IFPA/TÉCNICO EM SECRETARIADO/2016) O quadrilátero ABCD da figura abaixo é um paralelogramo e DE é bissetriz do ângulo CDA. Se BC = 5 cm e BE = 3 cm, o perímetro desse paralelogramo é igual a:



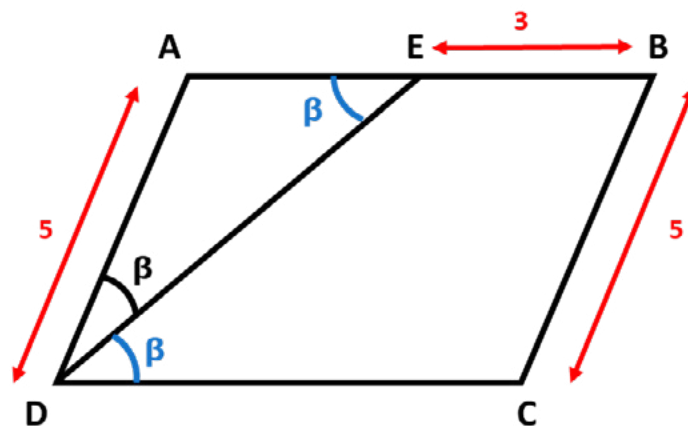
- a) 26 m
- b) 24 m
- c) 22 m
- d) 20 m
- e) 18 m



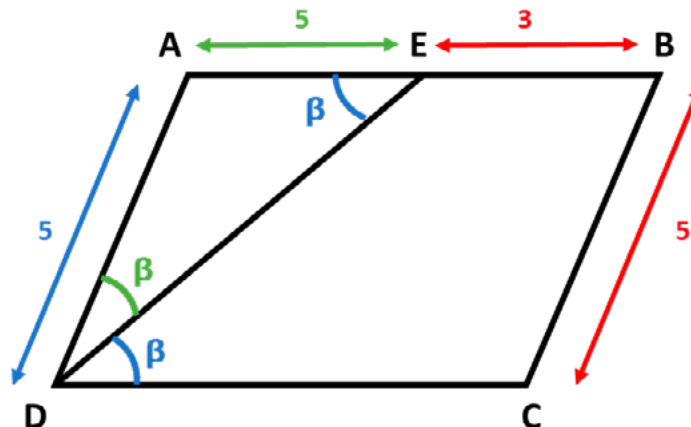
Pelas informações do enunciado, o segmento CE é bissetriz do ângulo ADC. Assim, os ângulos ADE e CDE são iguais. Além disso, vamos juntar as outras informações fornecidas no enunciado sobre as medidas dos segmentos BE e BC.



Observe que o segmento DE é uma transversal e os ângulos AED e EDC são alternos e internos. Sabemos que os alternos e internos de uma transversal passando por duas paralelas são iguais.



Por consequência, os ângulos AED e EDA são iguais. Logo, o triângulo ADE é isósceles. Assim, podemos calcular o segmento AE, pois os lados opostos a ângulos iguais em um triângulo são iguais:



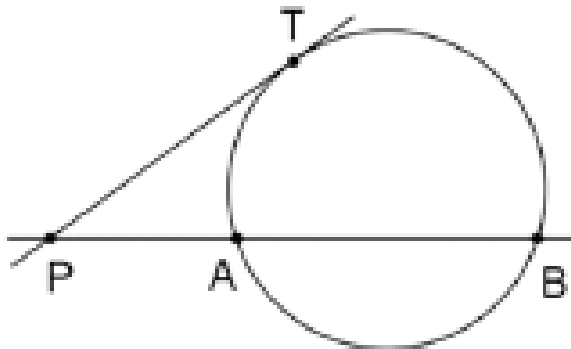
Portanto, os lados AB e DC do paralelogramo ABCD são iguais a 8. Por fim, o perímetro do paralelogramo é igual a:

$$2p_{\text{paralelogramo}} = (\overline{AD} + \overline{BC}) + (\overline{AE} + \overline{EB}) + \overline{DC}$$

$$2p_{\text{paralelogramo}} = (5 + 5) + (5 + 3) + 8 = 26$$

Letra a.

048. (FGV/AL-RO/ANALISTA LEGISLATIVO/MATEMÁTICA/2018) A figura a seguir mostra a secante PAB e a tangente PT a uma circunferência. Sabe-se que, no triângulo PTB, tem-se $PT = TB$ e que, na circunferência, os arcos AB e BT têm a mesma medida.

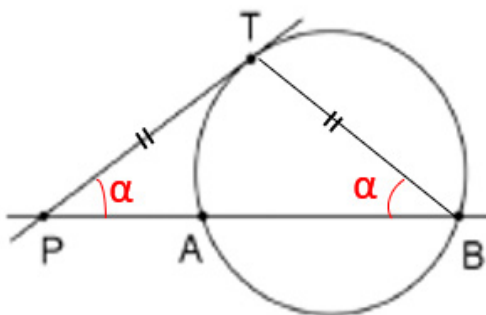


O ângulo APT mede:

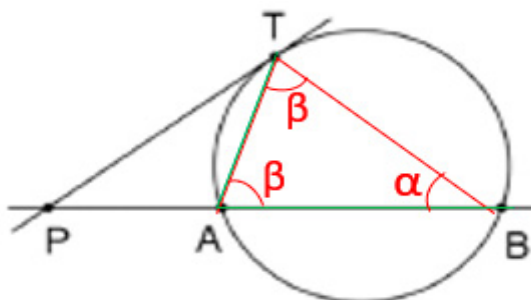
- a) 30° .
- b) 36° .
- c) 40° .
- d) 45° .
- e) 60° .



Note que, por se tratar de um triângulo isósceles, temos que $\angle BPT = \angle TBP$. Chamaremos esse ângulo de α .



Agora, analisando os arcos que compõem a circunferência, temos a formação de um triângulo inscrito à circunferência.



Como os arcos AB e TB tem a mesma medida, chamaremos seus respectivos ângulos associados de β . Assim, pela propriedade dos ângulos internos de um triângulo, temos a primeira equação:

$$\alpha + \beta + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad (I)$$

Por fim, como o ângulo TPB é um **ângulo excêntrico exterior**, ele respeita a seguinte propriedade:

$$T\hat{P}B = \frac{\widehat{TB} - \widehat{AT}}{2}$$

Sabendo que:

$$T\hat{P}B = \alpha$$

$$\widehat{TB} = 2\beta$$

$$\widehat{AT} = 2\alpha$$

Substituindo, temos a segunda equação:

$$\alpha = \frac{2\beta - 2\alpha}{2} = \beta - \alpha$$

$$2\alpha = \beta \quad (II)$$

Através das equações I e II, vem:

$$\alpha + 2 \cdot (2\alpha) = 180^\circ$$

$$\alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

$$5\alpha = 180^\circ$$

$$\therefore \alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

Assim, o ângulo APT equivale a 36° .

Letra b.

049. (INÉDITA/2018) Considerando 1,73 como valor aproximado da raiz de 3 a área de hexágono inscrito numa circunferência de raio 10 cm é superior a 250 cm^2 .

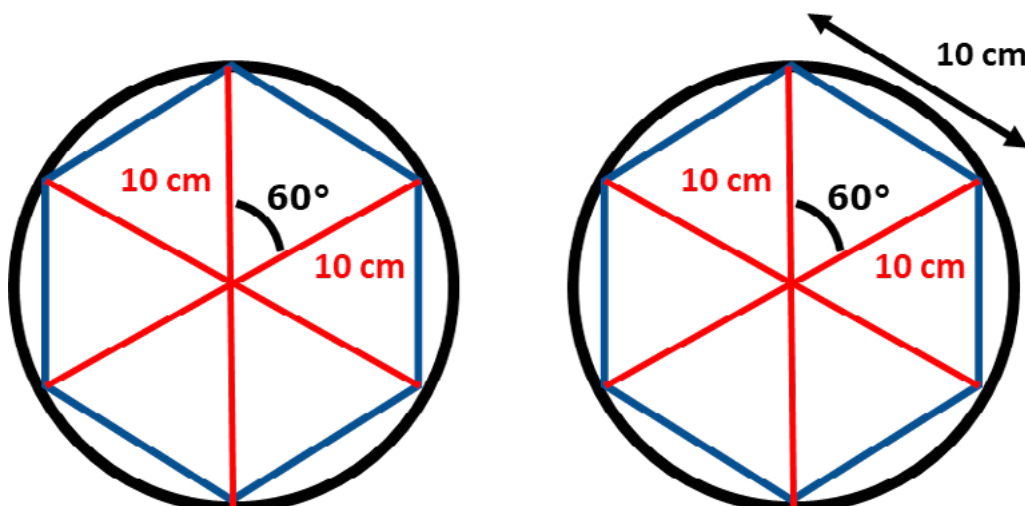


Como os seis vértices do hexágono pertencem à circunferência e nada foi mencionado na questão sobre a regularidade do polígono, admitamos que é regular.

Marcando o centro da circunferência no ponto O e irradiando os segmentos, temos que as diagonais do hexágono correspondem ao diâmetro da circunferência. As diagonais dividem o hexágono em seis triângulos isósceles e a medida dos catetos iguais correspondem ao raio da circunferência ($r = 10 \text{ cm}$).

Como a soma dos ângulos referentes ao ponto O somam 360° e há 6 ângulos iguais, temos:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$



Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e que $a=60^\circ$, pode-se afirmar que o triângulo é equilátero e que cada um de seus lados mede 10 cm .

Sendo a área do hexágono formada por seis triângulos equiláteros, temos:

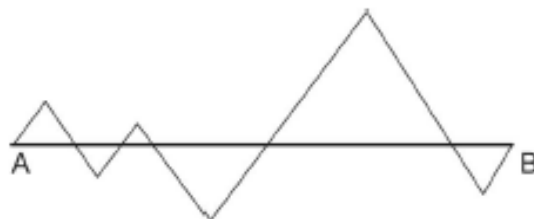
$$S_6 = 6 \cdot S_{\Delta} = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{100}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$S_6 = 6 \cdot 25 \cdot \sqrt{3}$$

$$\therefore S_6 = 150\sqrt{3} = 150 \cdot 1,73 = 15 \cdot 17,3 = 259,5 \text{ cm}^2$$

Certo.

050. (FCC/PREFEITURA DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO/SP/ARQUITETO/DESAFIO/2019) Os seis triângulos que aparecem na figura são equiláteros, com bases no segmento AB que mede 36 cm.



A soma dos perímetros dos triângulos, em cm, é:

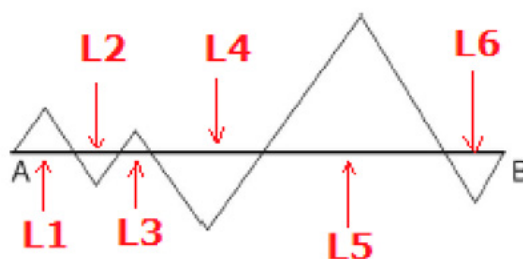
- a) 36
- b) 54
- c) 72
- d) 90
- e) 108



Primeiramente, note que são triângulos equiláteros, ou seja, as medidas de todos os seus lados são iguais.

Note também que o problema não cita “equiláteros entre si”, ou seja, não podemos afirmar que todos os triângulos são iguais entre si.

Considere as seguintes bases do triângulo:



Sabendo que o perímetro de um triângulo equilátero é 3x o seu lado, o perímetro total será:

$$\text{Perímetro Total} = 3 \cdot L1 + 3 \cdot L2 + 3 \cdot L3 + 3 \cdot L4 + 3 \cdot L5 + 3 \cdot L6$$

$$\text{Perímetro Total} = 3 \cdot (L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + L6)$$

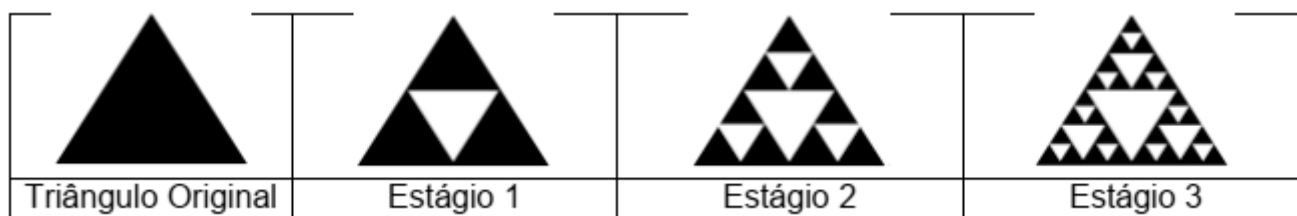
Como a somatória das bases dos triângulos é 36 cm, temos:

$$\text{Perímetro Total} = 3 \cdot 36$$

$$\therefore \text{Perímetro Total} = 108 \text{ cm}$$

Letra e.

051. (FUMARC/SEE-MG/PROFESSOR DE EDUCAÇÃO BÁSICA/MATEMÁTICA/2018) O Triângulo de Sierpinsky é um fractal criado a partir de um triângulo equilátero, da seguinte forma: divide-se cada lado do triângulo ao meio, unem-se estes pontos médios e forma-se um novo triângulo equilátero.



Se continuarmos o processo, quantos triângulos brancos haverá no Estágio 10?

- a) 9.841
- b) 16.683
- c) 29.524
- d) 59.049
- e) 88.573



Pela figura, temos o seguinte padrão:

- Estágio 1: 1
- Estágio 2: $1 + 3^1 = 4$
- Estágio 3: $1 + 3^1 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

Assim, temos a seguinte sequência:

$$A = 1, 4, 13, 40 \dots$$

Seguindo a fórmula do somatório de uma progressão geométrica, temos:

$$S = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

Como:

$$n = 10$$

$$q = 3$$

$$a_1 = 1$$

Então, substituindo os valores na fórmula do somatório:

$$S = 1 \cdot \frac{(3^{10} - 1)}{3 - 1}$$

$$S = \frac{(3^{10} - 1)}{3 - 1}$$

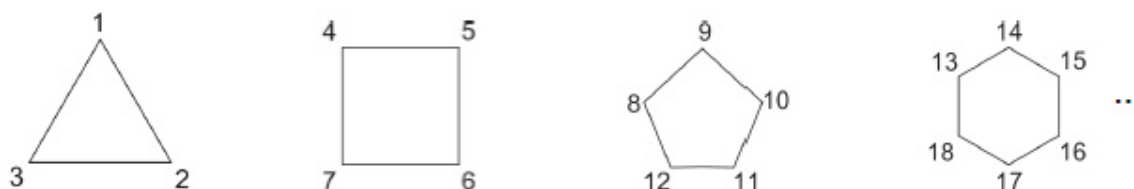
$$S = \frac{(3^{10} - 1)}{2}$$

$$S = \frac{(59049 - 1)}{2}$$

$$\therefore S = \frac{59048}{2} = 29524$$

Letra c.

052. (FCC/PREFEITURA DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO/SP/ANALISTA EM VIGILÂNCIA SANITÁRIA/DESAFIO/2019) Considere uma sequência de polígonos em que os vértices são sucessivamente numerados, como mostra a figura.

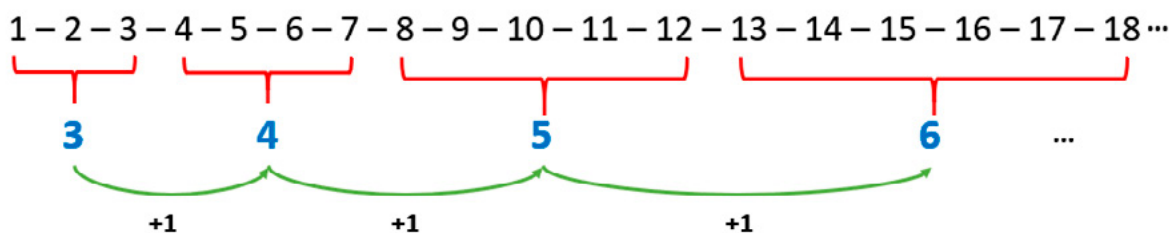


O número de lados do polígono dessa sequência em que se encontra o vértice de número 250 é:

- a) 18
- b) 16
- c) 22
- d) 20
- e) 24



Note que o número de lados (3, 4, 5,...) faz parte de uma Progressão Aritmética:



Então, para resolver o problema, é preciso utilizar a fórmula de Progressão Aritmética detalhada a seguir.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Como cada polígono terá 1 lado a mais que seu anterior, temos que a razão da PA será 1. Assim, temos:

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 1$$

$$a_n = 3 + n - 1$$

$$a_n = n + 2 = n^{\text{o}} \text{ de lados do polígono}(l)$$

Agora, utilizando a fórmula do somatório de termos de uma PA, temos:

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$250 = \frac{(3 + a_n) \cdot n}{2}$$

Substituindo o valor de a_n :

$$250 = \frac{(3 + (n + 2)) \cdot n}{2}$$

$$250 = \frac{(n + 5) \cdot n}{2}$$

$$500 = (n + 5) \cdot n$$

$$500 = n^2 + 5n$$

$$n^2 + 5n - 500 = 0$$

Para sermos mais rápidos, podemos resolver por soma e produto. Dessa forma, temos:

$$Soma = \frac{-b}{a}$$

$$Produto = \frac{c}{a}$$

Então:

$$Soma = \frac{-5}{1} = -5$$

$$Produto = \frac{-500}{1} = -500$$

Assim, os dois números cuja soma é -5 e o produto entre eles é -500 são:

$$y = -25 \text{ e } x = 20$$

Como o número deve ser positivo, pois representa lados, temos que $x = 20$. Substituindo na equação I, temos:

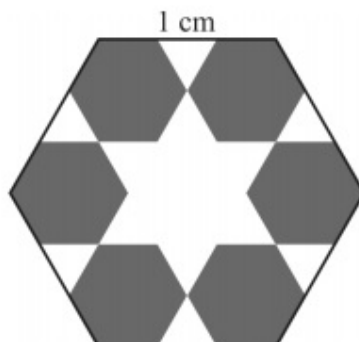
$$a_{20} = 20 + 2 \quad (I)$$

$$\therefore a_{20} = 22 \text{ lados}$$

Assim, o 20º polígono terá 22 lados.

Letra c.

053. (CESPE/SEFAZ/RS/TÉCNICO TRIBUTÁRIO DA RECEITA ESTADUAL/DESAFIO/2018) A figura a seguir ilustra a primeira etapa de um processo recursivo que, a partir de um hexágono regular em que os lados medem 1 cm de comprimento, constroem-se 6 novos hexágonos regulares.



Nesse processo, os lados do hexágono externo são divididos em 3 partes iguais e, conforme mostra a figura, são construídos outros 6 hexágonos regulares; em cada um deles, o comprimento dos lados é igual a $\frac{1}{3}$ cm. Na segunda etapa, dividem-se os lados desses 6 novos hexágonos em 3 partes iguais, e constroem-se, de maneira semelhante à primeira etapa, outros 36 hexágonos regulares. Esse processo pode seguir indefinidamente.

Nessa situação, sabendo-se que, se o comprimento dos lados de um hexágono regular for igual a L cm, a área desse hexágono será igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2} L^2$ cm², é correto concluir que a soma das áreas dos hexágonos obtidos na 5ª etapa do processo recursivo descrito é igual a:

- a) $(\frac{2}{3})^4 \times \sqrt{3}$ cm².
- b) $(\frac{2}{3})^5 \times \sqrt{3}$ cm².
- c) $(\frac{3}{2})^5 \times \sqrt{3}$ cm².
- d) $(\frac{2}{3})^3 \times \sqrt{3}$ cm².
- e) $(\frac{3}{2})^4 \times \sqrt{3}$ cm².



Essa é uma questão bem difícil porque mescla geometria, progressões geométricas e um trabalho algébrico com potências.

Em cada redução, o comprimento L do hexágono será $L/3$. Como houve 5 reduções, temos que o novo L será:

$$L = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

Em cada redução são formados 6 hexágonos. O número de hexágonos formados depois de 5 reduções será:

$$\text{Hexágonos} = 6^5$$

Assim, para área de todos os hexágonos após a 5ª redução, basta aplicar esses valores na fórmula apresentada.

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot L^2$$

$$\text{Área total} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot L^2\right) \cdot n$$

Com n igual ao número de hexágonos. Logo, a área total será:

$$\text{Área total} = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^2\right] \cdot 6^5$$

Na potência de uma potência devemos conservar a base e multiplicar os expoentes:

$$\text{Área total} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{5 \cdot 2} \right) \cdot 6^5$$

$$\text{Área total} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1^{10}}{3^{10}} \right) \right) \cdot 6^5$$

Agora, podemos utilizar o fato de que $6 = 2 \cdot 3$. Assim, temos:

$$\text{Área total} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1^{10}}{3^{10}} \right) \right) \cdot (2 \cdot 3)^5$$

$$\text{Área total} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1^{10}}{3^{10}} \right) \right) \cdot 2^5 \cdot 3^5$$

Vamos efetuar algumas simplificações. Podemos simplificar 3 e 3^5 com o 3^{10} o denominador, restando 3^4 no denominador. Também podemos dividir 2^5 por 2 chegando em 2^4 .

Para isso, basta lembrar que a razão de potências de mesma base, deve-se conservar a base e subtrair os expoentes.

$$\text{Área total} = \left(\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1^{10}}{3^{10-1-5}} \right) \right) \cdot 2^{5-1}$$

Agora, basta realizar a subtração dos expoentes. Além disso, note que qualquer potência de base 1 é sempre igual a 1. Portanto $1^{10} = 1$.

$$\text{Área total} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3^4} \right) \cdot 2^4$$

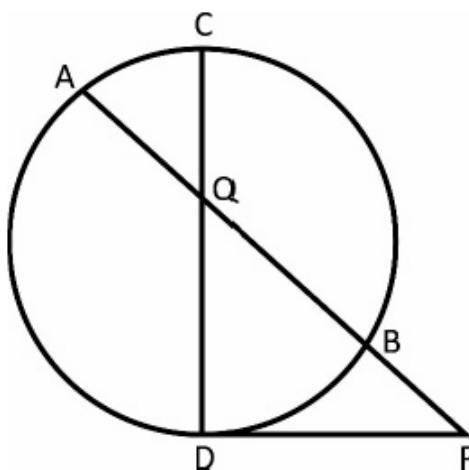
Podemos, por fim, reunir 2^4 e 3^4 e teremos:

$$\text{Área total} = \sqrt{3} \cdot \frac{2^4}{3^4}$$

$$\therefore \text{Área total} = \left(\frac{2}{3} \right)^4 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Letra a.

054. (QUADRIX/SEDUCE-GO/PROFESSOR DE NÍVEL III/MATEMÁTICA/2018) Em uma plantação de milho, foram encontradas marcas que moradores locais acreditam terem sido feitas por extraterrestes. No ponto Q, está localizada uma casa cujos residentes afirmam ter ouvido sons estranhos na noite passada. O desenho a seguir foi feito por um observador, de uma montanha, e pode conter distorções, mas foram feitas medidas precisas de algumas distâncias, como se segue: o círculo tem diâmetro CD; os segmentos AQ e CQ medem 6 km; e BP mede 4 km. Além disso, sabe-se que PD é tangente ao círculo em D.,

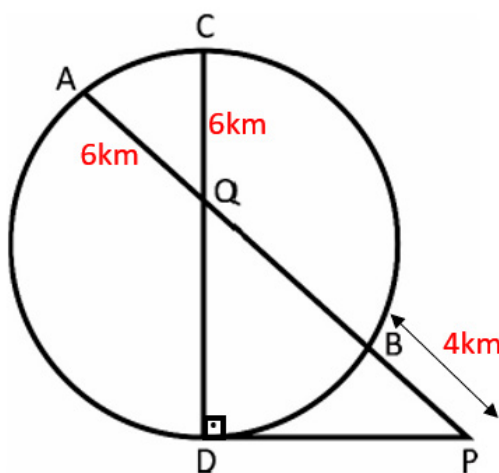


Com base nesse caso hipotético, assinale a alternativa correta.

- a) A soma das medidas de BQ, DQ e DP é igual a 28 e Q corresponde ao centro do círculo.
- b) A soma das medidas de BQ, DQ e DP é igual a 24 e Q corresponde ao centro do círculo.
- c) A soma das medidas de BQ, DQ e DP é igual a 20 e Q corresponde ao centro do círculo.
- d) A soma das medidas de BQ, DQ e DP é igual a 24 e Q não corresponde ao centro do círculo.
- e) A soma das medidas de BQ, DQ e DP é igual a 20 e Q não corresponde ao centro do círculo.



Analise a figura do problema:



Para resolver a questão, é preciso lembrar da seguinte relação:

$$CQ \cdot QD = AQ \cdot BQ$$

Como:

$$CQ = AQ = 6$$

Então:

$$6 \cdot QD = 6 \cdot BQ$$

$$\therefore QD = BQ \quad (I)$$

Agora, utilizando uma outra propriedade referente a um ponto externo a uma circunferência, temos

$$PD^2 = PA \cdot PB$$

Como:

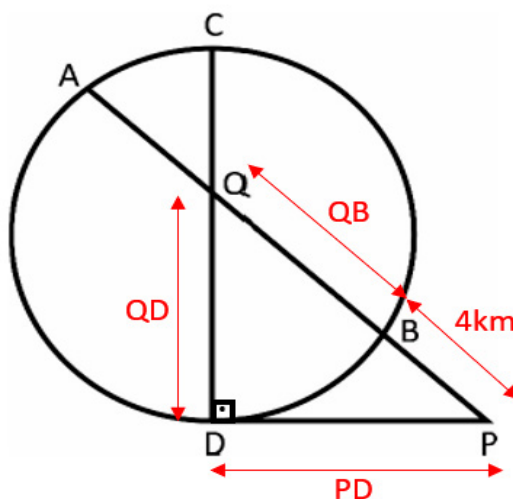
$$PA = 6 + 4 + BQ = 10 + BQ$$

$$PB = 4$$

Substituindo, temos:

$$PD^2 = (10 + BQ) \cdot 4 \quad (II)$$

Observe também que há um triângulo retângulo, o qual é possível fazer a relação de Pitágoras:



Logo:

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2$$

$$(4 + BQ)^2 = QD^2 + PD^2 \text{ (III)}$$

Substituindo I e II em III, vem:

$$(4 + BQ)^2 = BQ^2 + (10 + BQ) \cdot 4$$

$$(4 + BQ)^2 = BQ^2 + 40 + 4 \cdot BQ$$

Abrindo o produto notável da equação, temos:

$$4^2 + 2 \cdot 4 \cdot BQ + BQ^2 = BQ^2 + 40 + 4 \cdot BQ$$

$$4^2 + 2 \cdot 4 \cdot BQ = 40 + 4 \cdot BQ$$

$$16 + 8 \cdot BQ = 40 + 4 \cdot BQ$$

$$(8 - 4) \cdot BQ = 40 - 16$$

$$4 \cdot BQ = 24$$

$$\therefore BQ = \frac{24}{4} = 6$$

Assim, temos como resposta:

$$BQ = DQ = 6$$

Substituindo em II, temos:

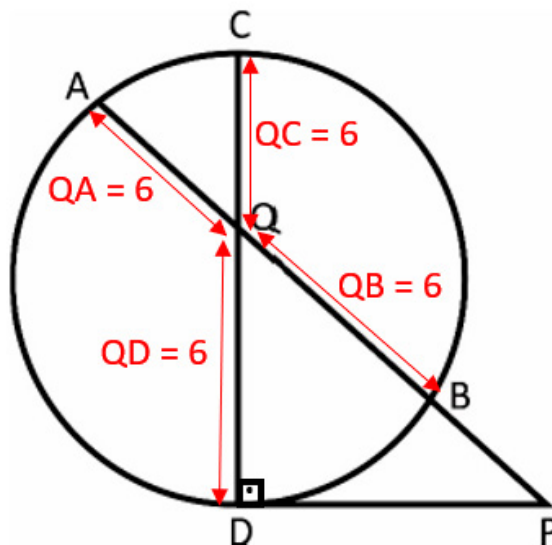
$$PD^2 = [10 + (6)] \cdot 4$$

$$PD^2 = 16 \cdot 4$$

$$PD^2 = 64$$

$$\therefore PD = \sqrt{64} = 8$$

Por fim, temos a seguinte figura:



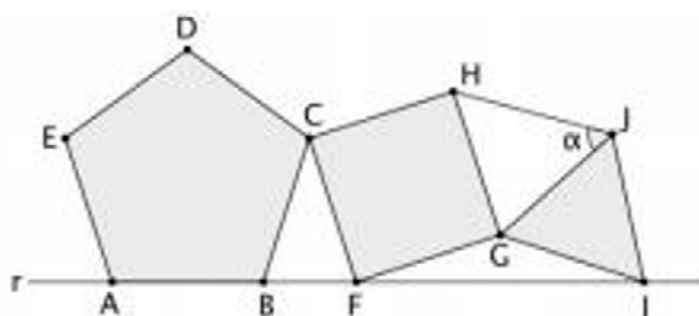
Assim, é possível afirmar que o ponto Q é centro do círculo pois divide em tamanhos iguais as cordas que por ele passam.

Além disso, a soma $BQ + DQ + DP = 6 + 6 + 8 = 20$.

Letra c.

055. (FGV/PROCEMPA/TÉCNICO EM TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO/2024)

A figura a seguir mostra três polígonos regulares todos com lados do mesmo tamanho e com os vértices A, B, F e I sobre a reta r.



O ângulo GJH mede em graus:

- a) 54
- b) 57
- c) 60
- d) 63
- e) 66

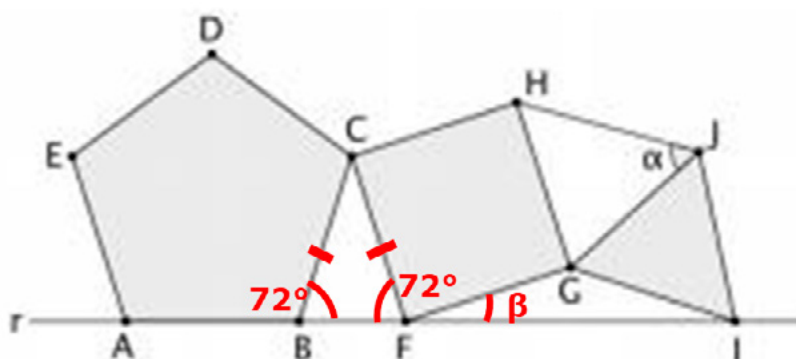


Essa é uma questão muito interessante em que devemos utilizar triângulos isósceles. Nesse tipo de triângulo, dois lados são iguais e os ângulos opostos respectivamente a eles são também iguais.

Primeiramente, vamos descobrir o ângulo interno do pentágono:

$$\alpha_n = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ \therefore \alpha_5 = \frac{(5-2)}{5} \cdot 180^\circ = \frac{3}{5} \cdot 180^\circ = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$$

Sabendo disso, pode-se afirmar que o ângulo suplementar de 108° é igual a 72° . Como os lados $\overline{BC}$ e $\overline{CF}$ são iguais, o triângulo BCF é isósceles.



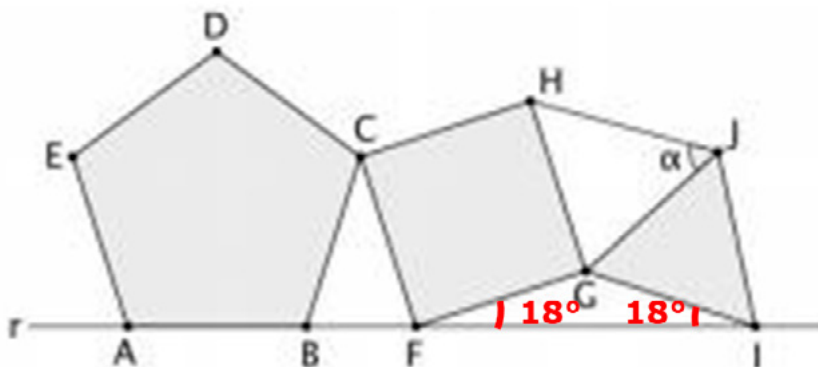
Em volta do vértice F, temos um ângulo raso, de 180° , formando pelo ângulo $CFB = 72^\circ$, o ângulo interno do quadrado que é de 90° e o ângulo GFI , cuja medida é igual a β . Podemos determiná-lo:

$$72^\circ + 90^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$162^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\therefore \beta = 180^\circ - 162^\circ = 18^\circ$$

Como os lados $\overline{FG}$ e $\overline{GI}$ são iguais, o triângulo FGI é isósceles.



Agora, no triângulo FGI, sendo γ o ângulo FGI, a soma dos ângulos internos é dada por:

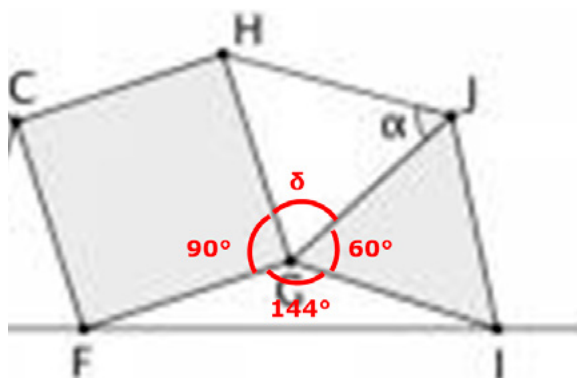
$$18^\circ + 18^\circ + \gamma = 180^\circ \therefore \gamma = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$$

Em volta do vértice G, temos um ângulo de 144° , um triângulo e um quadrado. O próximo passo é descobrir o ângulo interno do triângulo e do quadrado:

$$\alpha_n = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ \therefore \alpha_3 = \frac{(3-2)}{3} \cdot 180^\circ = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$$

$$\alpha_4 = \frac{(4-2)}{4} \cdot 180^\circ = \frac{2}{4} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

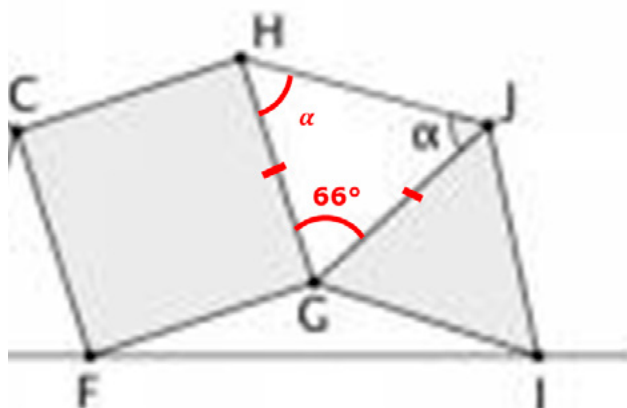
Atente-se que no vértice G temos uma volta completa.



$$G: 90^\circ + \gamma + 60^\circ + \delta = 360^\circ$$

$$90^\circ + 144^\circ + 60^\circ + \delta = 360^\circ \therefore \delta = 360^\circ - 294^\circ = 66^\circ$$

O triângulo HGJ é isósceles, porque o lado do quadrado é igual ao lado do triângulo. Então, podemos notar dois ângulos iguais nele:



Agora, no triângulo HGJ, a soma dos ângulos internos é dada por:

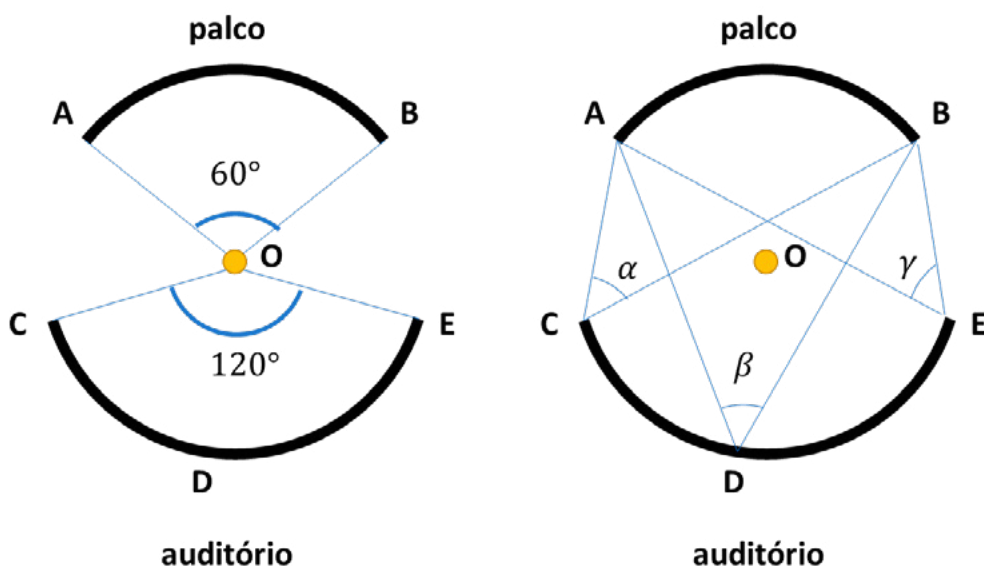
$$\delta + \alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$\therefore 2\alpha = 180^\circ - 66^\circ = 114^\circ$$

$$\therefore \alpha = \frac{114^\circ}{2} = 57^\circ$$

Letra b.

056. (INÉDITA/2024) O palco e o auditório foram construído na forma de arcos de circunferência AB e CE, que possuem o mesmo centro O e o mesmo raio R = 10 m.



Sendo α , β e γ os ângulos de visada dos espectadores C, D e E, a respeito desse auditório, julgue os seguintes itens:

Dado: $\pi = 3$; $\sin 120^\circ = 0,5$.

Os ângulos de visada dos espectadores C, D e E são iguais.



Observe que os ângulos CAB, DAB e EAB são ângulos inscritos, porque os pontos C, D e E são pontos da circunferência. Uma propriedade muito importante dos ângulos inscritos é que todos os ângulos inscritos no mesmo arco têm a mesma medida.

Certo.

057. (INÉDITA/2024) O ângulo de visada de D é igual a 60° .



Pela primeira figura, o ângulo central no arco AB é igual a 60° . Pelas propriedades da circunferência, o ângulo inscrito corresponde à metade do ângulo central. Portanto, esse ângulo mede 30° .

Errado.

058. (INÉDITA/2024) O comprimento do palco é igual a 10 metros.



O comprimento total de uma circunferência (360°) é igual a $2\pi R$. O arco de 60° corresponde a $1/6$ da circunferência. Então, podemos escrever:

$$L = 2\pi R \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi R}{6} = \frac{\pi R}{3} = \frac{\pi \cdot 10}{3} = 10$$

Certo.

059. (INÉDITA/2024) A área do triângulo COE corresponde a 25% da área do setor circular COE.



A área do triângulo pode ser calculada pela lei das áreas como o semiproduto de dois lados pelo seno do ângulo formado entre eles:

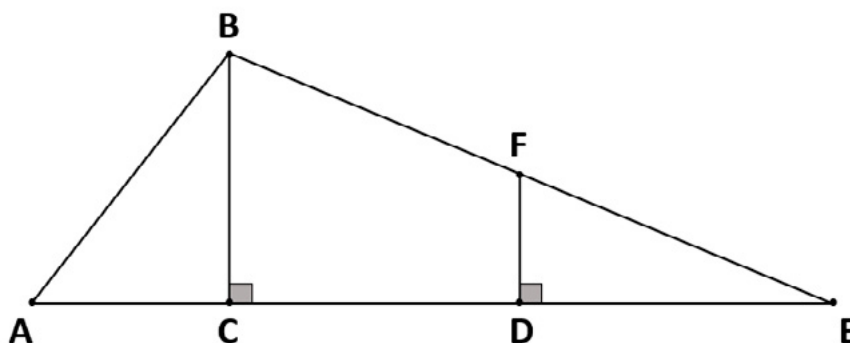
$$S_{\text{triângulo}} = \frac{ab \sen C}{2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sen 120^\circ}{2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 0,5}{2} = 25 \text{ m}^2$$

Portanto, a relação entre as áreas é:

$$\frac{S_{\text{triângulo}}}{S_{\text{setor}}} = \frac{25}{100} = 0,25 = 25\%$$

Certo.

060. (INÉDITA/2024) Considere o triângulo ABE indicado na figura associada. Os triângulos ABC, BCE e DEF são retos.



Julgue os itens a seguir.

Suponha que os lados do triângulo DEF estão em Progressão Aritmética. Sabendo que a razão é 2, então a hipotenusa desse triângulo será 10.



Uma PA com três termos pode ser escrita da seguinte forma:

$$(x - r, x, x + r)$$

Como o problema informa que a razão é 2, temos:

$$(x - 2, x, x + 2)$$

Lembre-se que a hipotenusa sempre é maior que qualquer um dos seus catetos. Assim, nesse caso, a hipotenusa vale $x+2$. Substituindo esses valores no Teorema de Pitágoras:

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 \quad \rightarrow \quad (x + 2)^2 = x^2 + (x - 2)^2$$

Abrindo os produtos notáveis e resolvendo:

$$(x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) = x^2 + (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2)$$

$$x^2 + 4x + 2^2 = x^2 + x^2 - 4x + 2^2$$

Podemos simplificar dos dois lados os termos " $x^2 + 4$ ".

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 - 4x + 4$$

$$4x = x^2 - 4x$$

$$x^2 - 8x = 0$$

Por fator comum, temos que:

$$x \cdot (x - 8) = 0$$

Então $x=0$ ou $x=8$. Como o valor de x é uma medida, este deve ser diferente de 0. Logo, $x = 8$. Substituindo na fórmula da hipotenusa, encontramos:

$$\text{hipotenusa} = x + 2$$

$$\text{hipotenusa} = 8 + 2$$

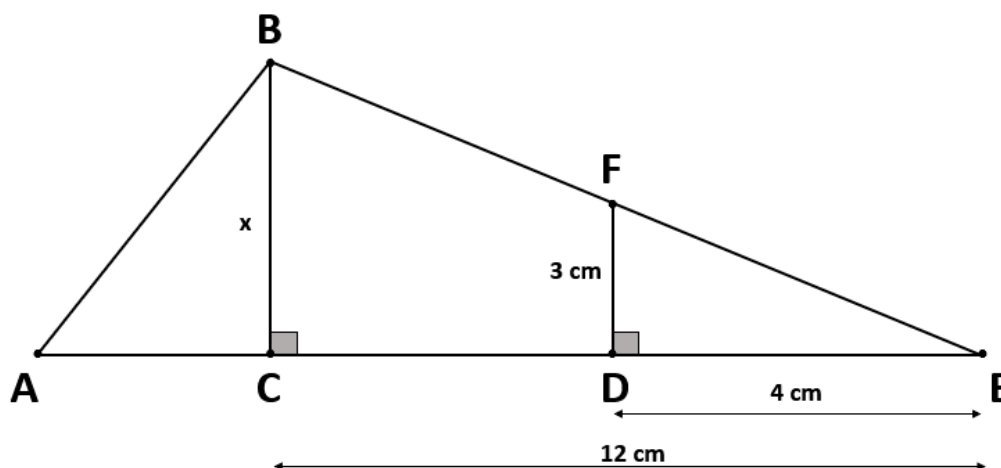
$$\therefore \text{hipotenusa} = 10$$

Certo.

061. (INÉDITA/2024) Suponha, agora, os seguintes valores: $DE = 4$ cm, $CE = 8$ cm e $FD = 3$ cm. Então o lado BC mede 12 cm.



Para resolver este problema, basta lembrarmos da semelhança de triângulos. Observe que o triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABE (pelo caso ângulo – ângulo – ângulo ou AAA). Assim, temos a seguinte figura:



Então:

$$\frac{\text{Lado } DE}{\text{Lado } CE} = \frac{\text{Lado } FD}{\text{Lado } BC}$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$\frac{4}{12} = \frac{3}{x}$$

$$x \cdot 4 = 12 \cdot 3$$

$$x \cdot 4 = 36$$

$$\therefore x = \frac{36}{4} = 9 \text{ cm}$$

Errado.

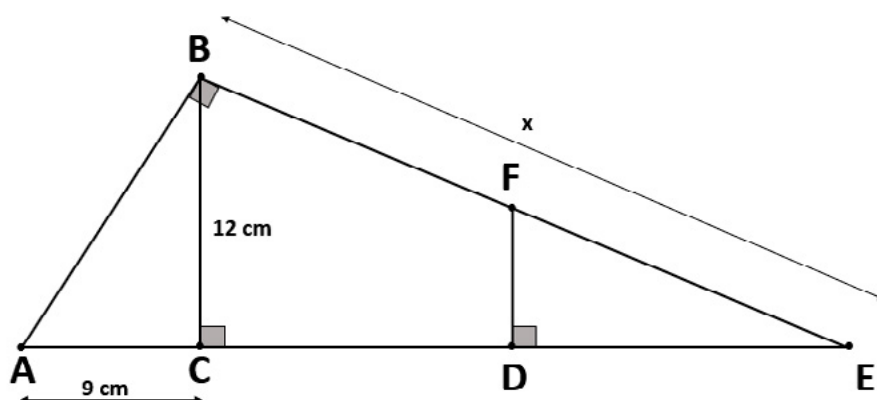
062. (INÉDITA/2024) Considere que $\angle ABE = 90^\circ$ e $BC = 12 \text{ cm}$. Além disso, $AC = 9 \text{ cm}$. Então, pode-se afirmar que $BE = 20 \text{ cm}$.



Os triângulos ABC e BEC são semelhantes pelo caso AAA. Basta rotacionar o triângulo ABC no sentido horário para facilitar a observação. Assim, temos:

- $\angle BAC = \angle EBC$
- $\angle ABC = \angle BEC$
- $\angle ACB = \angle BCE = 90^\circ$

Observe a figura com os dados do problema:



Para achar o valor de x , precisamos antes saber o valor de AB .

Note que se trata de um múltiplo do triângulo pitagórico clássico (3, 4, 5). Multiplicando todos os lados por 3, temos um triângulo de lados (9, 12, 15). Assim, $AB = 15 \text{ cm}$.

Através da semelhança dos triângulos, obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\text{Lado } AC}{\text{Lado } BC} = \frac{\text{Lado } AB}{\text{Lado } BE}$$

Substituindo os valores, temos:

$$\frac{9}{12} = \frac{15}{x}$$

$$x \cdot 9 = 12 \cdot 15$$

$$x \cdot 9 = 180$$

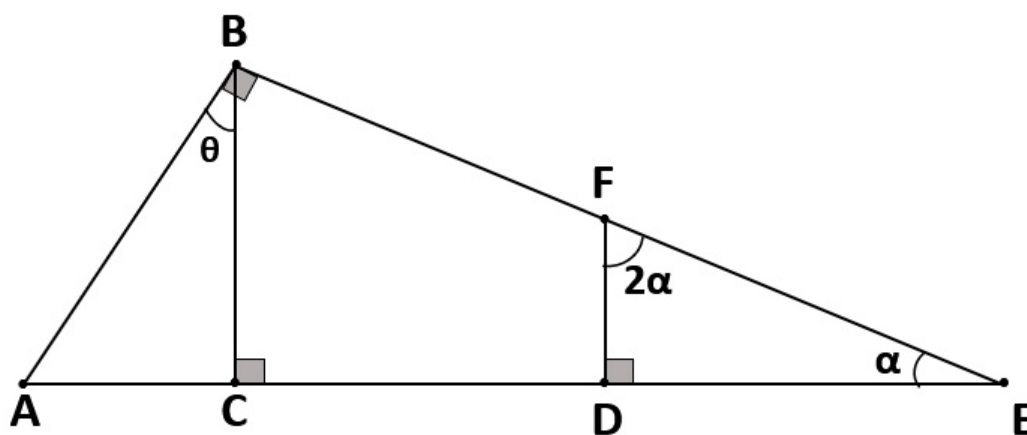
$$\therefore x = \frac{180}{9} = 20 \text{ cm}$$

Certo.

063. (INÉDITA/2024) Considere que $\angle ABE = 90^\circ$ e que $\angle DEF = \alpha$. Se $\angle DFE = 2\alpha$, então $\angle ABC = 20^\circ$.



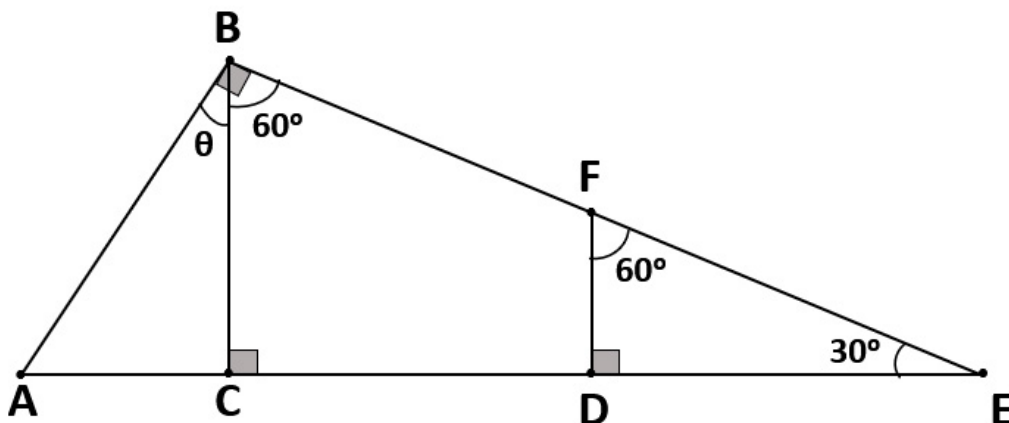
Lembre-se de que a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre vale 180° . Observe, a seguir, o triângulo com os dados do problema, com θ igual ao ângulo a ser descoberto.



Pelo triângulo DEF, temos:

Então, e . Pelo triângulo BCE, temos, por semelhança de triângulos:

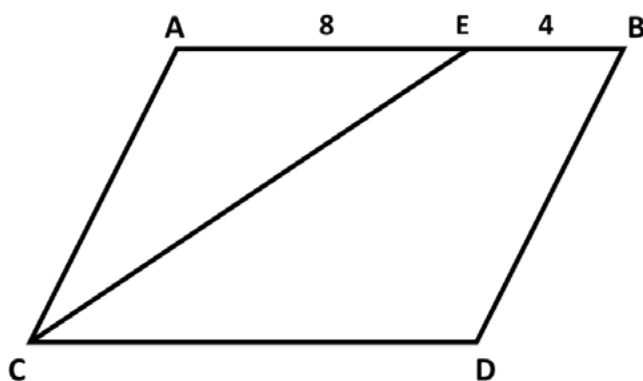
Substituindo todos os dados do problema, temos:



Logo, o ângulo é complementar ao ângulo.

Errado.

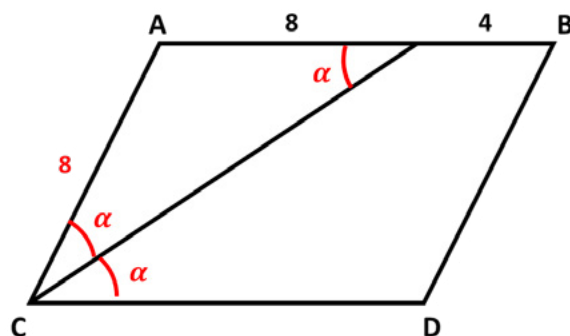
064. (INÉDITA/2024) Sabendo que a reta CE é bissetriz do ângulo C, determine o perímetro do paralelogramo ABCD:



- a) 36
- b) 40
- c) 56
- d) 64



Seja $\angle DCE = x$, como CE é bissetriz, os ângulos DCE e ACE são iguais. Além disso, como AE e CD são paralelas, o ângulo AEC é igual também a x .



Assim, o triângulo ACE é isósceles. Portanto, a medida AC é igual a 8. Em um paralelogramo, $AC = BD$ e $AB = CD$. Portanto, o seu perímetro é:

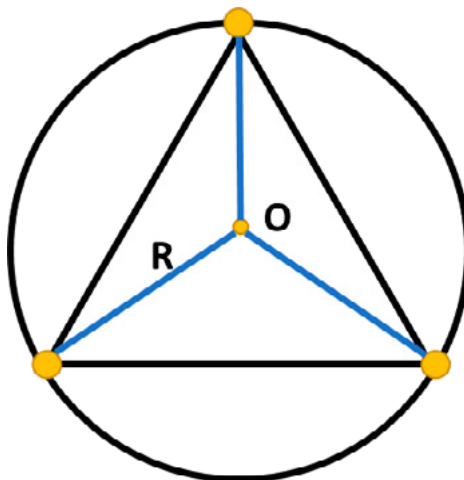
Letra b.

065. (INÉDITA/2024) Três cidades A, B e C estão situadas a uma distância de 400 km uma da outra, formando um triângulo equilátero. Deseja-se construir uma central de monitoramento de vizinha, que deve se situar em um ponto O a uma mesma distância de todas essas cidades. Sabendo que $(1,73)^2 = 3$, é possível afirmar que a distância entre a central de monitoramento e cada uma das cidades é:

- a) 160 km.
- b) 200 km.
- c) 231 km.
- d) 300 km.
- e) 346 km.



Observe que a central de monitoramento O se localiza no centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, tendo em vista que os segmentos OA, OB e OC têm o mesmo comprimento.



Podemos calcular o raio usando a Lei dos Senos, observando que os ângulos internos do triângulo são iguais a 60° .

Fazendo as contas, temos:

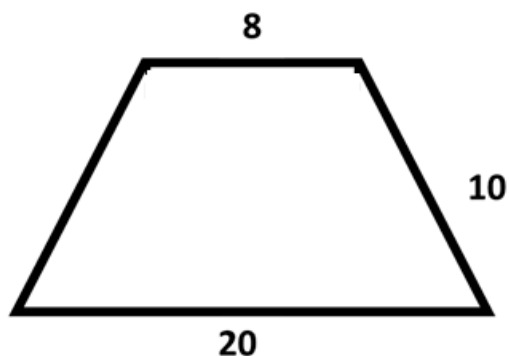
Letra c.

066. (INÉDITA/2024) O trapézio isósceles ABCD é tal que o lado AB é paralelo ao lado CD. Além disso, sabe-se que os lados AC e BD são iguais a 10 cm. Sabendo que o lado AB = 20 cm e que o lado CD = 8 cm, assinale a alternativa que indica a área do trapézio.

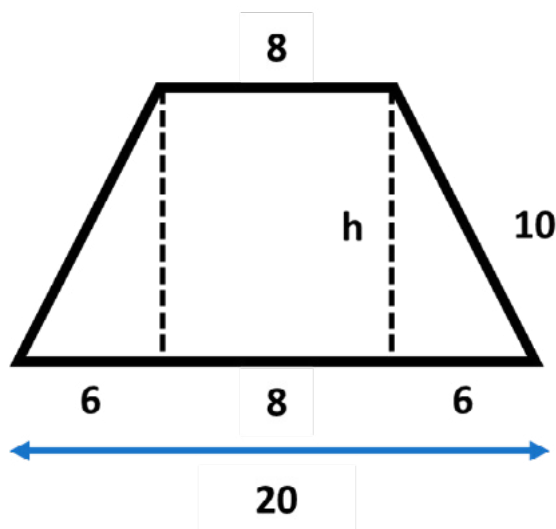
- a) 96
- b) 112
- c) 144
- d) 160



Vamos desenhar o trapézio como pedido no enunciado.



Para calcular a área do trapézio, precisaremos desenhar sua altura.



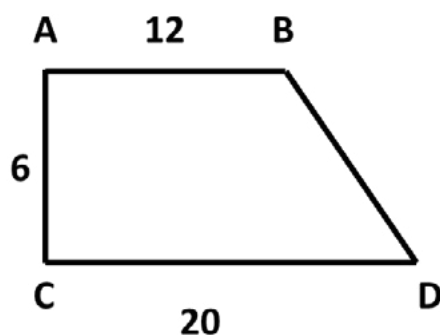


Para obter a altura, podemos usar o teorema de Pitágoras, tendo em vista que a altura h é um cateto de um triângulo retângulo com hipotenusa igual a 10.

A área do trapézio pode ser obtida como a média aritmética das bases multiplicada pela altura.

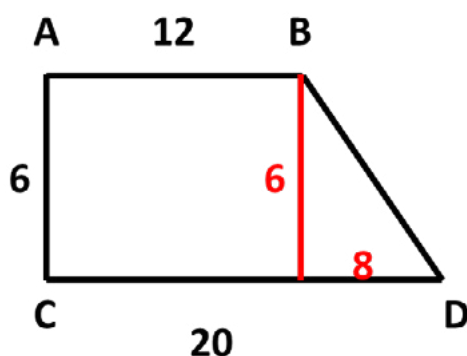
Letra b.

067. (INÉDITA/2024) Calcule o perímetro da seguinte figura plana.



- a) 42
- b) 44
- c) 48
- d) 50
- e) 52

Podemos fazer uma construção auxiliar paralela à altura do trapézio.



Assim, BD é a hipotenusa de um triângulo retângulo. Essa hipotenusa pode ser calculada pelo Teorema de Pitágoras:

Assim, o perímetro do trapézio pode ser obtido como a soma de todas as suas dimensões:

Letra c.

Abra



caminhos



crie

futuros

gran.com.br

