

MATEMÁTICA

Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares



Presidente: Gabriel Granjeiro

Vice-Presidente: Rodrigo Calado

Diretor Pedagógico: Erico Teixeira

Diretora de Produção Educacional: Vivian Higashi

Gerente de Produção Digital: Bárbara Guerra

Todo o material desta apostila (incluindo textos e imagens) está protegido por direitos autorais do Gran. Será proibida toda forma de plágio, cópia, reprodução ou qualquer outra forma de uso, não autorizada expressamente, seja ela onerosa ou não, sujeitando-se o transgressor às penalidades previstas civil e criminalmente.

CÓDIGO:

251010252330



THIAGO CARDOSO

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.

GRAN
CONCURSOS

SUMÁRIO

Apresentação	4
Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares	5
1. Conceitos Básicos	5
1.1. Elemento	5
1.2. Soma de Matrizes	5
1.3. Produto de Matrizes	7
1.4. Matriz Transposta	10
2. Determinante	16
2.1. Matriz Triangular	16
2.2. Matriz 2x2	17
2.3. Matriz 3x3	19
2.4. Teorema de Binet	21
2.5. Produto por Escalar	22
2.6. Regra de Jacobi	23
3. Sistemas Lineares	37
3.1. Classificação de Sistemas Lineares	39
Resumo	50
Questões Comentadas em Aula	52
Gabarito	63

APRESENTAÇÃO

Olá, aluno(a), seja bem-vindo(a) a mais uma aula do nosso curso de Raciocínio Lógico. Nesta aula, falaremos sobre Matrizes.

Matrizes são um assunto com pouca teoria, centrada principalmente nas propriedades do determinante. Neste material, abordamos de forma bastante objetiva e concisa, de modo que você tenha todas as ferramentas que vai precisar para resolver questões de prova envolvendo esse assunto.

Como sempre, gostaria de me disponibilizar pelo Fórum de Dúvidas.

Além disso, não se esqueça de me seguir no Instagram: @math.gran.

MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

1. CONCEITOS BÁSICOS

Uma matriz é uma forma de dispor números na forma de uma tabela com linhas e colunas.

A ordem de uma matriz é dada pelo número de linhas e colunas que ela possui. Vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

É importante atentar para a sequência correta. Quando falamos da matriz $A_{2 \times 3}$, queremos dizer que A possui duas linhas e três colunas. É sempre assim: primeiro o número de linhas, depois o número de colunas.

Lembre-se: na matriz, tudo está organizado LINHA-COLUNA.

Um caso particular de matrizes são as matrizes quadradas, que são aqueles em que o número de linhas é igual ao número de colunas.

1.1. ELEMENTO

O elemento de uma matriz é identificado pela linha e pela coluna em que se localiza.

O elemento a_{ij} está na linha i e na coluna j. Por exemplo, nas matrizes anteriores, temos:

$$a_{13} = -1$$

$$b_{21} = -3$$

Note que o elemento a_{13} está na primeira linha e na terceira coluna da matriz A e que o elemento b_{21} está na segunda linha e na primeira coluna da matriz B.

1.2. SOMA DE MATRIZES

A soma de matrizes só pode ser feita entre duas matrizes de mesma ordem produzindo uma nova matriz de mesma ordem.

$$C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n}$$

A soma é feita elemento a elemento. Pode-se escrever matematicamente que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Em outras palavras, qualquer elemento da matriz C é igual à soma dos elementos das matrizes A e B que estejam na linha e coluna correspondentes. Vejamos um exemplo para ficar mais claro:

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+4 & 3+5 & 5+6 \\ 4+7 & 9+8 & 25+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 11 \\ 11 & 17 & 34 \end{bmatrix}$$

Analogamente, pode ser feita a diferença de matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C = B - A = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 4-2 & 5-3 & 6-5 \\ 7-4 & 8-9 & 9-25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -16 \end{bmatrix}$$

DIRETO DO CONCURSO



001. (Q3753945/CETREDE/PREFEITURA DE PIRES FERREIRA/MÉDICO/2024) Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

O valor de $A + B$ é:

a) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$



A soma de matrizes deve ser feita elemento por elemento:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + 4 & 3 + 1 \\ 1 + 3 & 4 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Letra a.

1.3. PRODUTO DE MATRIZES

O primeiro ponto a se comentar é que o produto de matrizes **nem sempre é compatível**. É necessário que as matrizes tenham dimensões apropriadas.

Para que seja possível realizar o produto AB , precisamos que o número de colunas da matriz A seja igual ao número de linhas da matriz B .

$$C = A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

Vejamos alguns exemplos.

EXEMPLO

$$C = A_{3 \times 2} B_{2 \times 1} = C_{3 \times 1}$$

$$C = A_{4 \times 3} B_{3 \times 3} = C_{4 \times 3}$$

$$C = A_{3 \times 2} B_{3 \times 2} \text{ não é compatível}$$

É interessante que o produto de duas matrizes de mesma ordem nem sempre é compatível, como no caso acima. Na verdade, esse produto somente será compatível no caso de matrizes quadradas.

Além disso, **o produto de matrizes**, em regra, **não é comutativo**. Ou seja, o produto AB é diferente de BA , na maioria dos casos.

É bastante possível que ambos os produtos existam, mas sejam de ordens diferentes.

$$C = A_{4 \times 3} B_{3 \times 4} = C_{4 \times 4}$$

$$D = B_{3 \times 4} B_{4 \times 3} = D_{3 \times 3}$$

Também é possível que o produto AB exista, mas não exista o produto BA.

$$C = A_{3 \times 2} B_{2 \times 1} = C_{3 \times 1}$$

$$B_{2 \times 1} A_{3 \times 2} \text{ não é compatível}$$

O produto de matrizes deve ser feito linha por coluna. Podemos estabelecer o seguinte algoritmo.

$$C = AB \therefore c_{ij} = A_i \cdot B_j$$

Essa notação não é rigorosa matemática, é apenas uma forma de escrever que eu criei para facilitar o entendimento sobre o produto de matrizes.

Em outras palavras, o elemento c_{12} (primeira linha e segunda coluna de C) é igual à soma dos produtos dos elementos da primeira linha da matriz A pelos elementos da segunda coluna da matriz B.

Vejam um exemplo para entender melhor.

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{3 \times 3} B_{3 \times 1} = C_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1.1 + 1.0 + 1.2 \\ 2.1 + 3.0 + 5.2 \\ 4.1 + 0.9 + 2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 54 \end{bmatrix}$$

Veja que, para chegar ao elemento c_{12} (primeira linha e segunda coluna de C), multiplicamos os elementos da primeira linha de A pelos elementos da segunda coluna de B. Como escrevemos na nossa notação, $c_{12} = A_1 B_2$.

Entendo que o produto de matrizes é bastante estranho. Por isso, vamos fazer um novo exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{3 \times 3} B_{3 \times 1} = C_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1.2 + 2.(-1) + 3.1 \\ 4.2 + 5.(-1) + 6.1 \\ 7.2 + 8.(-1) + 9.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

DIRETO DO CONCURSO



002. (Q3737389/CEBRASPE/EMBRAPA/TÉCNICO/2025) Se a matriz C for a matriz resultante do produto entre $A_{3 \times 2}$ e $B_{2 \times 3}$, então C terá 6 linhas e 6 colunas.



O produto AB realmente é possível, porque o número de linhas de B é igual ao número de colunas de A.

$$A_{3 \times 2} B_{2 \times 3} = C_{3 \times 3}$$

Errado.

1.3.1 MATRIZ IDENTIDADE

Um caso particular importante de matriz é a **matriz identidade**, que possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e todos os elementos fora da diagonal principal iguais a 0.

Vejamos alguns exemplos de matrizes identidades de várias ordens.

EXEMPLO

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação. Sendo assim, o produto de qualquer matriz A pela identidade, em qualquer ordem, desde que seja compatível, é igual à própria matriz A.

$$AI = IA = A$$

1.3.2. MATRIZ INVERSA

A matriz inversa de uma matriz quadrada A é aquela que, quando multiplicada pela matriz A em qualquer ordem produz a matriz identidade. Ou seja, $B = A^{-1}$

$$B = A^{-1} \Leftrightarrow AB = BA = I$$

Uma observação importante é que a matriz inversa do produto também pode ser obtida como o produto das matrizes inversas, porém, na ordem trocada.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

O procedimento para a obtenção de matrizes inversas é bastante complicado.

1.4. MATRIZ TRANSPOSTA

A matriz transposta da matriz A é obtida trocando-se suas linhas e colunas de lugar. A transposta de A pode ser representada por A' ou por A^t. Vejamos um exemplo.

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \therefore A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \therefore B' = [2 \quad -1 \quad 1]$$

1.4.1. PROPRIEDADES DA TRANSPOSTA

A transposta da soma é igual à soma de transpostas.

$$(A + B)' = A' + B'$$

Além disso, a transposta do produto é igual ao produto das transpostas, porém, na ordem trocada.

$$(AB)' = B'A'$$

1.4.2. MATRIZ SIMÉTRICA E ANTISSIMÉTRICA

Dois casos particulares importantes de matrizes são as matrizes simétricas e antissimétricas.

Uma matriz quadrada é simétrica quando é igual à sua transposta. Vejamos um exemplo:

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Faça a transposição e verifique que $A = A'$.

Uma matriz será simétrica quando todos os elementos diametralmente opostos pela diagonal principal são iguais. Vejamos:

Diagram illustrating a 3x3 matrix A with its main diagonal highlighted in red (labeled "diagonal principal") and opposite elements highlighted in blue. The matrix is:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para facilitar sua compreensão, destacamos a diagonal principal em vermelho, e mostramos os elementos opostos por ela em azul.

Por outro lado, uma matriz quadrada é antissimétrica quando é o negativo de sua transposta. Em outras palavras, $A + A' = 0$. Vejamos como exemplo:

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

São duas condições para que uma matriz seja antissimétrica:

Todos os elementos da diagonal principal são nulos;

Os elementos diametralmente opostos à diagonal principal são simétricos.

Diagram illustrating a 3x3 matrix A with its main diagonal highlighted in red (labeled "diagonal principal") and opposite elements highlighted in blue. The matrix is:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ao fazer a transposição de A , podemos ver facilmente que a soma $A + A'$ produz a matriz nula.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + A' = \begin{bmatrix} 0+0 & 1-1 & 2-2 \\ 1-1 & 0 & 3-3 \\ 2-2 & 3-3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DIRETO DO CONCURSO



003. (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR-BA/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2019) Considere as matrizes $A_{2 \times 3}$ e $B_{2 \times 2}$.

Sobre essas matrizes é correto afirmar que

- a) Existe a soma $A + B$ e é uma matriz 4×5 .
- b) Existe o produto AB e é uma matriz 4×6 .
- c) Existe o produto BA e é uma matriz 4×6 .
- d) Não existe o produto AB .
- e) Não existe o produto BA .



Vejamos sobre a existência dos produtos AB e BA com base nos tamanhos das matrizes.

$$\begin{array}{ccc}
 A_{2 \times 3} & B_{2 \times 2} & \\
 \text{[Red bracket]} & & \\
 \text{incompatível} & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 B_{2 \times 2} & A_{2 \times 3} & = C_{2 \times 3} \\
 \text{[Blue bracket]} & & \\
 \text{compatível} & &
 \end{array}$$

Portanto, o produto AB não existe, e o produto BA retorna uma matriz 2×3 .

Letra d.

004. (IBFC/PC-PR/PERITO CRIMINAL/2017/ADAPTADA) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, assinale a alternativa que apresenta a matriz C que representa a soma das matrizes A e B , ou seja, $C = A + B$:



Basta fazer a soma individual dos elementos da matriz.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
 C = A + B &= \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1-1 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

5, 4, 1; 1, 0, 1.

005. (IBFC/PC-PR/PERITO CRIMINAL/2017/ADAPTADA) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, assinale a alternativa que apresenta a matriz C que representa a subtração das matrizes A e B , ou seja, $C = A - B$:



Aplicando a regra da subtração de matrizes:

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 & 0-2 \\ 4-0 & -7-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

2, -2; 4, -5.

006. (CESPE/SEDF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$ julgue o próximo item. Se $B = \begin{bmatrix} 0 & x & -7 \\ 1 & 0 & z \\ y & 10 & 0 \end{bmatrix}$ e a matriz $A + B$ for simétrica, então $x + y + z = 0$.



Façamos a soma das matrizes $A + B$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & -7 \\ 1 & 0 & z \\ y & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & 0+x & 10-7 \\ 4+1 & 10+0 & 20+z \\ 0+y & 2+10 & 40+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x & 3 \\ 5 & 10 & 20+z \\ y & 12 & 40 \end{bmatrix}$$

Assim, a soma $A + B$ é:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & x & 3 \\ 5 & 10 & 20+z \\ y & 12 & 40 \end{bmatrix}$$

Para que a matriz seja simétrica, devemos ter:

$$x = 5$$

$$3 = y$$

$$20 + z = 12 \therefore z = -8$$

Portanto, a soma pedida é:

$$x + y + z = 5 + 3 - 8 = 0$$

Certo.

007. (Q3482016/COTEC/PREFEITURA DE MONTES CLAROS/FISCAL MUNICIPAL/2024) Uma empresa de logística organiza as distâncias entre três centros de distribuição (A, B, C) e as três principais cidades (X, Y, Z), em uma matriz M. A matriz M é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 15 & 25 & 35 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}$$

em que

- a primeira linha representa as distâncias de A para X, Y e Z, respectivamente.
- a segunda linha representa as distâncias de B para X, Y e Z, respectivamente.
- a terceira linha representa as distâncias de C para X, Y e Z, respectivamente.

Logo, qual é a matriz transposta M^t ?

a) $\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 15 & 25 & 35 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 40 & 50 & 60 \\ 15 & 25 & 35 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 25 & 30 & 35 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 10 & 15 & 40 \\ 20 & 25 & 50 \\ 30 & 35 & 60 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 10 & 25 & 40 \\ 15 & 30 & 50 \\ 20 & 35 & 60 \end{bmatrix}$



Na transposição de matrizes, o que é linha vira coluna, e o que é coluna vira linha. Assim, vamos montar linha por linha a matriz transposta pedida.

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 15 & 25 & 35 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \quad M^t = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 40 \\ & & \end{bmatrix}$$

1ª linha da transposta

Façamos a segunda linha da transposta.

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 15 & 25 & 35 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \quad M^t = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 40 \\ 20 & 25 & 50 \\ & & \end{bmatrix}$$

2ª linha da transposta

E, por fim, façamos a terceira linha.

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 15 & 25 & 35 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \quad M^t = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 40 \\ 20 & 25 & 50 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}$$

3ª linha da transposta

Letra c.

008. (Q3661788/INSTITUTO CONSULPLAN/CRP 3/ANALISTA ORGANIZACIONAL/2025) Em uma pesquisa realizada pelo Conselho Regional de Psicologia (CRP), analisou-se a interação entre fatores associados ao desempenho de indivíduos em diferentes tarefas. Essas interações foram representadas pelas matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & x \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

O valor de x , para que o produto $A \cdot B$ seja uma matriz simétrica, é:

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) 2



Façamos o produto usando a técnica da linha-produto.

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & x \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4) \cdot 2 + x \cdot 0 & (-4) \cdot (-2) + x \cdot 2 \\ 6 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 6 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -8 & 8 + 2x \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$$

Em uma matriz simétrica, os elementos diagonalmente opostos pela diagonal principal devem ser iguais. Assim, temos:

$$8 + 2x = 12$$

$$\therefore 2x = 12 - 8 = 4$$

$$\therefore x = \frac{4}{2} = 2$$

Letra d.

2. DETERMINANTE

O determinante é o principal assunto cobrado a respeito de matrizes e o que mais você precisa ficar de olho.

A definição de determinante é bastante complicada e requer a compreensão do Teorema de Laplace que é um assunto que considero bastante avançado para ser cobrado em provas de concurso.

Por isso, vamos focar apenas nos casos particulares mais importantes e nas propriedades dos determinantes, que são os assuntos cobrados desse tópico.

Primeiramente, você deve saber que o conceito de determinante **somente se aplica a matrizes quadradas**.

Ademais, uma matriz é dita singular quando seu determinante é igual a zero.

2.1. MATRIZ TRIANGULAR

Uma matriz triangular tem todos os elementos de um lado acima ou abaixo da diagonal principal iguais a zero. O seu determinante é simplesmente o produto de todos os elementos da diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & -4 & 4 \end{bmatrix} \therefore \det A = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$$

Perceba que, nesse caso, podemos ignorar todos os termos que estão fora da diagonal principal. Um caso particular de matriz triangular é a matriz diagonal.

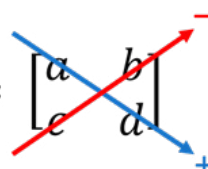
$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \therefore \det B = (-2) \cdot (-1) \cdot 3 = 6$$

2.2. MATRIZ 2X2

Numa matriz 2x2 qualquer, o determinante é calculado de maneira muito simples.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \therefore \det A = ad - bc$$

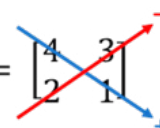
Observe que o determinante de uma matriz 2x2 pode ser calculado como o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.



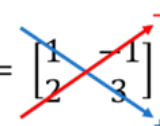
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det(A) = ad - bc$$

Vejamos alguns exemplos.

EXEMPLO



$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$



$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \det(B) = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 3 + 2 = 5$$

DIRETO DO CONCURSO

009. (INSTITUTO CONSULPLAN/CRP 3/ANALISTA ORGANIZACIONAL/ÁREA DE COMPRAS E CONTRATOS/2025) Durante uma análise sobre a relação entre variáveis em um estudo psicológico, um conjunto de matrizes foi utilizado para representar dados de comportamentos. Considere as matrizes A e B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Determine o valor do determinante da matriz $A^T \cdot B$, onde A^T é a matriz transposta de A.

- a) -15
- b) -10
- c) 10
- d) 15



Primeiramente, vamos calcular o produto pedido.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Portanto, o produto será calculado pela técnica linha por coluna.

$$A^T B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T B = \begin{bmatrix} 13 & 16 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Por fim, o determinante será o produto dos elementos da diagonal principal menos o da diagonal secundária.

$$\det(A^T B) = 13 \cdot 5 - 16 \cdot 5 = 65 - 80 = -15$$

Letra a.

010. (Q3375941/FUNDATEC/PREFEITURA DE PASSO FUNDO/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2024)

O determinante da matriz $A = [a_{ij}]$ 2×2 , tal que $a_{ij} = (i + 2j)^2$, é igual a:

- a) -76.
- b) -17.
- c) -2.
- d) 72.
- e) 724.



Primeiramente, vamos obter a matriz usando a regra de formação dos seus elementos.

$$A = \begin{bmatrix} (1 + 2.1)^2 & (1 + 2.2)^2 \\ (2 + 2.1)^2 & (2 + 2.2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)^2 & (5)^2 \\ (4)^2 & (6)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 25 \\ 16 & 36 \end{bmatrix}$$

Na sequência, vamos calcular o determinante clássico de matriz 2x2.

$$\det A = 9.36 - 25.16 = 324 - 400 = -76$$

Letra a.

2.3. MATRIZ 3X3

Os determinantes de ordem 3 devem ser calculados pela Regra de Sarrus. O procedimento está descrito a seguir:

- Duplicar as duas primeiras colunas ao lado da terceira;
- Multiplicar os elementos da diagonal principal e das duas paralelas a ela com sinal positivo;
- Multiplicar os elementos da diagonal secundária e das duas paralelas a ela com sinal negativo.

Vejamos um exemplo:

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{array}$$

$$\det A = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.4.8 - 7.5.2 - 8.6.1 - 9.4.2$$

$$\therefore \det A = 45 + 84 + 96 - 70 - 48 - 72 = 225 - 190 = 35$$

DIRETO DO CONCURSO

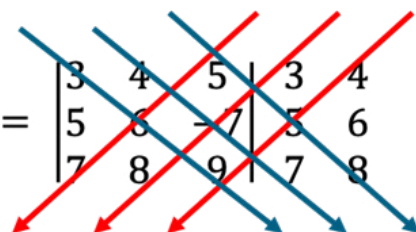
011. (Q3736980/FUNDATEC/PREFEITURA DE EREBANGO/ENFERMEIRO/2025) Determine o valor do dobro do determinante da matriz abaixo:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & -7 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

- a) -112
- b) -56
- c) 388
- d) 672
- e) 776



Vamos utilizar a Regra de Sarrus.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & -7 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$


Assim, temos:

$$\det A = 3 \cdot 6 \cdot 9 + 4 \cdot (-7) \cdot 7 + 5 \cdot 5 \cdot 8 - 5 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot (-7) \cdot 8 - 4 \cdot 5 \cdot 9$$

$$\det A = 162 - 196 + 200 - 210 + 168 - 180 = -56$$

Como a questão pediu o dobro do determinante, a resposta é:

$$2 \cdot \det A = 2 \cdot (-56) = -112$$

Letra a.

012. (Q3366836/ACAFE/CELESC/ANALISTA ENGENHEIRO/2024) Seja a matriz A, o valor de k, para o qual a matriz A é singular, é:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & k \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- a) 1.
- b) 4.
- c) 3.
- d) 2.
- e) 5.



Uma matriz é singular quando seu determinante é igual a zero. Vamos calcular usando a regra de Sarrus.

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 0 & k \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

- - - + + +

Façamos a conta do determinante.

$$\det A = (-3) \cdot 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot 4 + k \cdot 5 \cdot 1 - k \cdot 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot 5 \cdot (-1)$$

$$\det A = 6 + 0 + 5k - 8k + 9 - 0$$

$$\det A = -3k + 15$$

Como queremos que a matriz seja singular, devemos igualá-lo a zero.

$$\det A = -3k + 15 = 0$$

$$3k = 15 \therefore k = \frac{15}{3} = 5$$

Letra e.

2.4. TEOREMA DE BINET

Agora, vamos a uma das propriedades mais cobradas do assunto determinante. Se compatível, o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes.

Trata-se de uma propriedade bastante interessante, pois, já sabemos que, em geral, o produto AB não é comutativo. Ou seja, AB geralmente é diferente de BA . Porém, o determinante do produto é sim comutativo.

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Um caso particular interessante diz respeito ao determinante da potência, que também é a potência do determinante.

$$\det(A^n) = (\det A)^n$$

É relativamente comum questões de prova pedirem para que você calcule a potência de uma matriz.

Como vimos, o produto de matrizes já é por si só bastante complicado de fazer e toma muito tempo na hora da prova. Sendo assim, calcular A^5 na hora da prova é completamente fora de questão.

2.5. PRODUTO POR ESCALAR

Quando uma matriz é multiplicada por um escalar (um número real qualquer), o seu determinante ficará multiplicado seguindo a regra:

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

É preciso prestar atenção, pois o escalar fica elevado à ordem da matriz.

Por exemplo, se a matriz A é de ordem 3, o escalar ficará elevado ao cubo.

É importante não confundir essa propriedade com o que acontece quando multiplicamos **apenas uma linha ou coluna** da matriz por um escalar qualquer.

Se somente uma linha da matriz fica multiplicada por 3, então o determinante da matriz ficará multiplicado por 3.

Vejamos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \therefore \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 4 + 1 = 5$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \therefore \det B = 2 \cdot 5 = 10$$

A matriz B é obtida multiplicando-se por 2 a primeira linha de A , portanto, o seu determinante também será o dobro do determinante de A . Isso pode ser verificado calculando-se normalmente o determinante dessa matriz diretamente sem o uso de nenhuma propriedade.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \therefore \det B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 = 8 + 2 = 10$$

2.6. REGRA DE JACOBI

A Regra de Jacobi estabelece que o determinante não se altera quando é feita uma alteração na matriz, de modo que uma linha ou coluna seja somada ou subtraída a qualquer outra linha ou coluna da matriz.

Vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

Nessa matriz, tomamos a primeira linha e a subtraímos da segunda e da terceira linhas. Ao fazer isso, o determinante não se altera.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-1 & 3-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & 5-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$$

Então, obtivemos uma matriz triangular, cujo determinante é bem mais fácil de ser calculado. É possível também multiplicar a linha ou coluna por um fator conveniente.

EXEMPLO

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = ?$$

Nesse caso, podemos multiplicar a primeira linha por dois para subtrair da segunda e por três para subtrair da terceira.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2-2 \cdot 1 & 3-2 \cdot 1 & 3-2 \cdot 1 \\ 3-3 \cdot 1 & 3-3 \cdot 1 & 6-3 \cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$$

Mais uma vez, usamos a regra prática para o cálculo de determinante de matriz triangular.

DIRETO DO CONCURSO 

013. (IADES/CRF-TP/ANALISTA DE TI/2019) Suponha que, na Comissão de Farmácia Hospitalar do Conselho Federal de Farmácia, existam 5 computadores e 3 impressoras. Um sistema foi desenvolvido para controlar o número de páginas impressas diariamente. Esse sistema

registra o número de páginas impressas em uma matriz $A = (a_{ij})_{5 \times 3}$ na qual cada elemento a_{ij} registra o número de páginas enviadas pelo computador i para a impressora j . Ao final de determinado dia, verificou-se o registro da matriz, conforme apresentado.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{impressoras} \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 2 & 0 & 25 \\ 0 & 3 & 7 \\ 10 & 13 & 16 \\ 5 & 0 & 30 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{computador 1} \\ \text{computador 2} \\ \text{computador 3} \\ \text{computador 4} \\ \text{computador 5} \end{matrix} \end{matrix}$$

Como exemplo, nesse dia, o computador 1 imprimiu 10 páginas na impressora 2. O total de páginas impressas pelos computadores 2, 3 e 5 na impressora 3 foi igual a

- a) 55.
- b) 62.
- c) 67.
- d) 72.
- e) 80.



Vamos marcar os elementos pedidos em vermelho.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 2 & 0 & 25 \\ 0 & 3 & 7 \\ 10 & 13 & 16 \\ 5 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

Portanto, a soma pedida é:

$$S = a_{23} + a_{33} + a_{53} = 25 + 7 + 30 = 62$$

Letra b.

014. (IADES/CAU-RO/ARQUITETO E URBANISTA/2018) Suponha que, no CAU/RO, cinco conselheiros foram eleitos para o Conselho Diretor. Na primeira reunião do conselho, eles deveriam eleger entre si um presidente; para tanto, fizeram uma eleição em que cada um deveria votar em outro conselheiro e não poderia votar em si mesmo. Cada um dos cinco conselheiros foi identificado com um número de 1 a 5, e os votos foram representados na matriz $A = (a_{ij})_{5 \times 5}$ apresentada, na qual, para $i \neq j$, se o conselheiro i votar no conselheiro j , e $a_{ij} = 1$; caso contrário, $a_{ij} = 0$. Com base nessas informações, o conselheiro que foi eleito presidente foi o identificado com o número

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) 5.
- b) 1.
- c) 3.
- d) 2.
- e) 4.



Pela definição do enunciado, o elemento a_{ij} é igual a 1, quando o candidato i votou no candidato j . Portanto, a coluna marca o elemento que recebeu o voto.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

votos recebidos por 2
votos recebidos por 1

Portanto, a apuração de votos:

- 1 voto para o candidato 1;
- 3 votos para o candidato 2;
- 1 voto para o candidato 4.

Portanto, o candidato 2 será eleito.

Letra d.

015. (CESPE/IFF/2018) Considere que k seja um número real e que o determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ seja igual a 27. Nesse caso, se $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$, então o determinante da matriz $B - A$, será igual a:

- a) 30
- b) 0
- c) 3
- d) 6
- e) 10



Primeiramente, devemos calcular o determinante da matriz B.

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & k \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 - 3 \cdot (k) = 27 - 3k = 27$$

Assim, podemos calcular o valor de k.

$$27 - 3k = 27$$

$$\therefore 3k = 27 - 27 = 0$$

$$\therefore k = 0$$

Com isso, temos as matrizes A e B definidas.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Devemos tomar a diferença.

$$B - A = \begin{bmatrix} 3 - 3 & 0 - (-1) \\ 3 - 9 & 9 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

E, finalmente, calculamos o determinante da matriz 2x2.

$$\det(B - A) = \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - (-6) \cdot 1 = 0 + 6 = 6$$

Letra d.

016. (CESPE/SEDUC-AL/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2018) Se a é um número real e se o determinante da matriz $P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ for igual a zero, então $a = -2$ ou $a = 1$.



Vamos fazer a soma das matrizes.

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} a+0 & 1-2 \\ 0-2 & a-1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ -2 & a+1 \end{bmatrix}$$

Calculemos o determinante 2x2.

$$\det P = \begin{vmatrix} a & -1 \\ -2 & a+1 \end{vmatrix} = a \cdot (a+1) - (-2) \cdot (-1) = 0$$

$$\det P = a \cdot (a+1) - 2 = 0$$

$$\det P = a^2 + a - 2 = 0$$

Chegamos a uma equação do segundo grau, cujo discriminante pode ser calculado como:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

Os valores possíveis para o coeficiente **a** são:

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Tomando os dois sinais da expressão, temos:

$$a_1 = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_2 = \frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Certo.

017. (ESAF/DNIT/TÉCNICO ADMINISTRATIVO/2013) Os elementos de uma matriz $A_{3 \times 2}$, isto é, com três linhas e duas colunas, são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} (i+j)^2 & , \text{ se } i = j \\ i^2 + j^2 & , \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Em que a_{ij} representa o elemento da matriz $A_{3 \times 2}$ localizado na linha i e coluna j . Então, a soma dos elementos da primeira coluna de $A_{3 \times 2}$ é igual a:

- a) 17
- b) 15
- c) 12
- d) 19
- e) 13



A matriz A possui 3 linhas e 2 colunas. Os elementos da primeira coluna são aqueles a_{i1} .

$$a_{11} = (1 + 1)^2 = 2^2 = 4$$

$$a_{21} = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

$$a_{31} = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$$

Portanto, a soma pedida é:

$$S = a_{11} + a_{21} + a_{31} = 4 + 5 + 10 = 19$$

Letra d.

018. (CESPE/SEDF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$, julgue o próximo item. A matriz A é inversível.



Para saber se A é inversível, devemos pegar o seu determinante e verificar se é não nulo.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 10 & 2 & 0 \\ 4 & 10 & 20 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 40 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

- - - + + +

$$\det A = 2 \cdot 10 \cdot 40 + 0 \cdot 20 \cdot 0 + 10 \cdot 4 \cdot 2 - 10 \cdot 10 \cdot 0 - 2 \cdot 20 \cdot 2 - 0 \cdot 4 \cdot 40$$

$$\det A = 800 + 0 + 80 - 0 - 80 - 0 = 800$$

Como o determinante é diferente de zero, a matriz é inversível.

Letra d.

019. (ESAF/AFRFB/2014) A matriz quadrada A, definida genericamente por $A = a_{ij}$, é dada por $a_{11} = 0$; $a_{12} = -4$; $a_{13} = 2$; $a_{21} = x$; $a_{22} = 0$; $a_{23} = (1 - z)$; $a_{31} = y$; $a_{32} = 2z$ e, por último, $a_{33} = 0$. Desse modo, para que a matriz A seja uma matriz antissimétrica, os valores de a_{21} , a_{23} , a_{31} e a_{32} deverão ser, respectivamente, iguais a:

- a) 4; -2; -2; -2.
- b) 4; -2; 2; -2.
- c) 4; 2; -2; -2.

d) -4; -2; 2; -2.

e) -4; -2; -2; -2.



Uma matriz simétrica é aquela que, somada à sua transposta, iguala a zero. Assim temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1-z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -4 & 0 & 2z \\ 2 & 1-z & 0 \end{bmatrix}$$

De fato, devemos ter que todos os elementos da diagonal principal são nulos. Essa condição já foi observada pelo enunciado. Adicionalmente, devemos ter:

$$x + (-4) = 0 \therefore x = 4$$

$$2 + y = 0 \therefore y = -2$$

$$2z + (1 - z) = 0 \therefore z + 1 = 0 \therefore z = -1$$

Sendo assim, a matriz pedida é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1-z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, os elementos pedidos são:

$a_{21} = 4$, $a_{23} = 2$, $a_{31} = -2$ e $a_{32} = -2$

Letra c.

020. (IBFC/PC-PR/PERITO CRIMINAL/2017/ADAPTADA) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, assinale a alternativa que apresenta a matriz C que representa a subtração das matrizes A e B, ou seja, $C = AB$:



Basta aplicar o algoritmo tradicional da multiplicação de matrizes.

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 9 & -2 + 12 \\ 4 + 6 & 8 + 8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

8, 10; 10, 16.

021. (IBFC/PC-PR/PERITO CRIMINAL/2017/ADAPTADA) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine o elemento d_{21} da matriz $D = BA$



O elemento d_{21} é obtido pelo produto dos elementos da segunda linha da matriz B pelos elementos da primeira coluna da matriz A.

$$d_{21} = 3.(-1) + 4.4 = -3 + 16 = 13$$

É interessante que você saiba essa técnica para resolver o problema com mais agilidade.

13

022. (CESPE/SEDUC-AL/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2018) Julgue o item que se segue, relativo a matriz e sistema linear.

Se a é um número real e se o determinante da matriz

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

for igual a zero, então, $a = -2$ ou $a = 1$.



Vamos efetuar a soma de matrizes

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando multiplicamos uma matriz por um escalar, no caso, 2, todos os seus elementos devem ser multiplicados por 2.

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos somar os elementos das mesmas posições.

$$P = \begin{bmatrix} a+0 & 1-2 \\ 0-2 & a-1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ -2 & a+1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, podemos calcular o discriminante da matriz P.

$$\det P = a(a+1) - (-2).(-1) = a(a+1) - 2 = 0$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

Podemos resolver a equação do segundo grau. Para isso, primeiramente vamos calcular o discriminante.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

Com a raiz quadrada do discriminante, vamos calcular o valor das possíveis soluções de **a**.

$$a = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\therefore a_1 = \frac{-1 - 3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$\therefore a_2 = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto $a = -2$ ou $a = 1$.

Certo.

023. (FGV/SAD-PE/ANALISTA DE CONTROLE INTERNO/FINANÇAS PÚBLICAS/2009) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e seja n um número natural maior que 1. Na matriz A^{2n} , o elemento que ocupa a 1ª linha e 2ª coluna é:

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) n
- e) 2n



Potência de matrizes, em geral, é bastante complicado. Porém, a matriz A tem uma particularidade.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular a matriz A^2 .

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 & -1 + 1 \\ 0 + 0 & 0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

A matriz A é, portanto, uma matriz involutiva, ou seja, uma de suas potências é a própria matriz identidade.

Notamos que $A^2 = I \therefore A^{2n} = I^n = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Letra b.

024. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/ENGENHEIRO JÚNIOR/2018) Considere a matriz A apresentada a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Qual é o valor do determinante dessa matriz?

- a) -36
- b) -27
- c) -15
- d) +18
- e) +45



Embora não exista uma regra prática para calcular um determinante de quinta ordem, podemos notar que essa matriz é quase triangular. Usando a Regra de Jacobi, podemos transformá-la em uma matriz efetivamente triangular.

Podemos multiplicar a primeira linha por quatro para subtrair da segunda.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4-4.1 & -1-4.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Para eliminar o termo que nos incomoda na última linha, podemos multiplicar a quarta linha por $\frac{2}{5}$ e subtrair da última.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\frac{2}{5}.5 & 1-\frac{2}{5}.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-9) \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = -27$$

Letra b.

025. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO E CONTROLE JÚNIOR/2018) Sejam A uma matriz quadrada de ordem 2 e B uma matriz quadrada de ordem 3, tais que $\det A \cdot \det B = 1$. O valor de $\det(3A) \cdot \det(2B)$ é:

- a) 5
- b) 6
- c) 36
- d) 72
- e) 108



Usando as propriedades do determinante do produto por escalar.

$$P = \det(3A) \cdot \det(2B) = 3^2 \cdot \det(A) \cdot 2^3 \cdot \det(B) = 9 \cdot 8 \cdot \det(A) \cdot \det(B) = 72 \cdot 1$$

Letra d.

026. (CESPE/SEDUC-AL/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2018) Se a é um número real e se o determinante da matriz $P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ for igual a zero, então $a = -2$ ou $a = 1$.



Façamos a soma.

$$P = \begin{bmatrix} a + 2 \cdot 0 & 1 + 2 \cdot (-1) \\ 0 + 2 \cdot (-1) & a - 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ -2 & a + 1 \end{bmatrix}$$

Agora, tomemos o determinante:

$$\det P = \begin{vmatrix} a & -1 \\ -2 & a + 1 \end{vmatrix} = a(a + 1) - (-1)(-2) = 0$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$\therefore a = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$a_1 = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_2 = \frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Sendo assim, de fato, os valores possíveis de a que anulam o determinante citado são 1 e -2.

Certo.

027. (ESAF/AFRFB/2012) As matrizes, A, B, C e D são quadradas de quarta ordem. A matriz B é igual a $1/2$ da matriz A, ou seja: $B = 1/2 A$. A matriz C é igual a matriz transposta de B, ou seja: $C = B^t$. A matriz D é definida a partir da matriz C; a única diferença entre essas duas matrizes é que a matriz D tem como primeira linha a primeira linha de C multiplicada por 2. Sabendo-se que o determinante da matriz A é igual a 32, então a soma dos determinantes das matrizes B, C e D é igual a:

- a) 6
- b) 4
- c) 12
- d) 10
- e) 8



O determinante da matriz B é obtido pela regra:

$$\det B = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \det A = \frac{1}{16} \cdot 32 = 2$$

O determinante da matriz C é a transposta de B, portanto, tem o mesmo determinante.

$$C = B' \therefore \det C = \det B = 2$$

Como a matriz D é obtida pela multiplicação de uma linha de C por 2, o seu determinante também será o determinante de C multiplicado por 2.

$$\det D = 2 \cdot \det C = 2 \cdot 2 = 4$$

Portanto, a soma pedida é:

$$S = \det B + \det C + \det D = 2 + 2 + 4 = 8$$

Letra e.

028. (ESAF/MF/TÉCNICO ADMINISTRATIVO/2009) Seja uma matriz quadrada 4 por 4. Se multiplicarmos os elementos da segunda linha da matriz por 2 e dividirmos os elementos da terceira linha da matriz por -3, o determinante da matriz fica:

- a) Multiplicado por -1.
- b) Multiplicado por $-16/81$.
- c) Multiplicado por $2/3$.
- d) Multiplicado por $16/81$.
- e) Multiplicado por $-2/3$.



Quando multiplicamos uma linha da matriz por 2, o determinante fica multiplicado por 2. Quando dividimos uma linha da matriz por -3, o determinante fica dividido por -3. Sendo assim, o determinante da matriz ficará multiplicado por -2/3.

Letra e.

029. (ESAF/MF/ASSISTENTE TÉCNICO ADMINISTRATIVO/2017) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule o determinante do produto AB:

- a) 8
- b) 12
- c) 9
- d) 15
- e) 6



Pelo Teorema de Binet, o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 2.3 - 1.3 = 6 - 3 = 3$$

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 2.3 - 1.4 = 6 - 4 = 2$$

Sendo assim, o determinante do produto será:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 3.2 = 6$$

Letra e.

030. (ESAF/ANAC/TÉCNICO ADMINISTRATIVO/2016) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, o determinante da matriz 2A é igual a:

- a) 40
- b) 10
- c) 18
- d) 16
- e) 36



Primeiramente calcularemos o determinante da matriz A. Esse é um tipo de determinante que me deixa muito tentado a aplicar a Regra de Jacobi. Subtrairemos

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1.1.4 + 0.1.0 + 2.1.1 - 0.1.2 - 1.1.1 - 4.1.0 = 4 + 0 + 2 - 0 - 1 - 0 = 5$$

Agora, aplicando o determinante do produto, temos:

$$\det 2A = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot 5 = 40$$

Letra a.

031. (ESAF/ATRFB/2012) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, o determinante de A^5 é igual a:

- a) 20
- b) 28
- c) 32
- d) 30
- e) 25



Calcular uma matriz elevada à quinta potência tomaria tempo demais na sua preciosa prova. O mais interessante é utilizar as propriedades do determinante.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - 0.1 = 2 - 0 = 2$$

Agora, basta usar que:

$$\det(A^5) = (\det A)^5 = 2^5 = 32$$

Letra c.

032. (CESPE/SEDUC-AL/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2021) Considerando as matrizes A e B com coeficientes reais dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & x \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 2x & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & x & 3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Julgue o item a seguir.

Se $x = 0$, então a matriz B é invertível e $\det(B^{-1}) = 1/6$.



Para $x = 0$, a matriz B se torna:

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Podemos calcular o determinante pela Regra de Sarrus:

$$\det B = 0.2.0 + 0.0.1 + 3.0.(-1) - 3.2.1 - 0.(-1).9 - 0.0.0$$

$$\det B = -6$$

O determinante do inverso de B é o inverso do determinante de B. Assim, temos:

$$\det B^{-1} = \frac{1}{\det B} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

Portanto, o determinante pedido é $-1/6$, com o sinal negativo, e não $1/6$, com sinal positivo, como sugerido pelo enunciado.

Errado.

3. SISTEMAS LINEARES

Um sistema linear é formado por um conjunto de equações e incógnitas. Os sistemas mais conhecidos são os sistemas de duas equações e duas incógnitas. Vejamos um exemplo:

EXEMPLO

$$x + y = 4$$

$$x - y = 2$$

Nesse sistema, temos duas equações e duas incógnitas (x e y). Sistemas desse tipo podem ser resolvidos pelo método da adição ou da subtração.

Neste material, aprenderemos a lidar com sistemas lineares de várias equações e várias incógnitas. Por exemplo, o sistema a seguir possui 3 equações e 3 incógnitas.

$$x + y + z = 6$$

$$2x - y + 2z = 4$$

$$x + 2y + 3z = 12$$

A primeira habilidade que devemos desenvolver para resolver esse tipo de linear é separá-lo em matrizes. A matriz principal (denominada matriz A) é formada pelos coeficientes associados às incógnitas. Vejamos um exemplo:

EXEMPLO

Coeficientes x	Coeficientes y	Coeficientes z
1	1	1
2	-1	2
1	2	3

Dessa maneira, temos a matriz principal associada ao sistema.
De posse dela, podemos escrever o sistema da seguinte forma.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

A segunda matriz é denominada matriz B ou matriz dos coeficientes independentes.
Sendo assim, temos o sistema:

$$AX = B$$

$$\text{em que: } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Para obter as matrizes A e B, é importante deixar o sistema bem organizado com todos os coeficientes independentes isolados do lado direito da equação, exatamente como vimos nesse exemplo. Vejamos um exemplo de sistema que veio completamente desarrumado e que precisamos consertar.

EXEMPLO

$$2y + z = 4 - x$$

$$3z - 2 = 4y - 2x$$

$$x + y + z + 1 = 0$$

Precisamos organizar esse sistema isolando as incógnitas x, y e z no lado esquerdo e os coeficientes independentes no lado direito das equações. Vejamos como fica:

$$x + 2y + z = 4$$

$$2x - 4y + 3z = 2$$

$$x + y + z = -1$$

Agora, sim, podemos obter as matrizes A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Além das matrizes A e B, temos as matrizes auxiliares A_x , A_y e A_z .

A matriz A_x é obtida a partir da matriz A substituindo-se a coluna correspondente aos coeficientes da incógnita x pelos coeficientes da matriz B.

Por exemplo, considere o primeiro sistema de equações:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Devemos nos lembrar que os coeficientes relacionados à incógnita x são os da primeira coluna, os relacionados à y são os da segunda e os relacionados à z são os da terceira.

$$A_x = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

3.1. CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

O principal assunto que é cobrado em provas é simplesmente a classificação dos sistemas lineares.

Um sistema linear é **possível** quando admite soluções reais. Por outro lado, um sistema **impossível** é aquele que **não admite soluções reais**.

Um sistema possível pode ser classificado em:

- **Determinado:** quando admite uma única solução;
- **Indeterminado:** quando admite várias soluções.

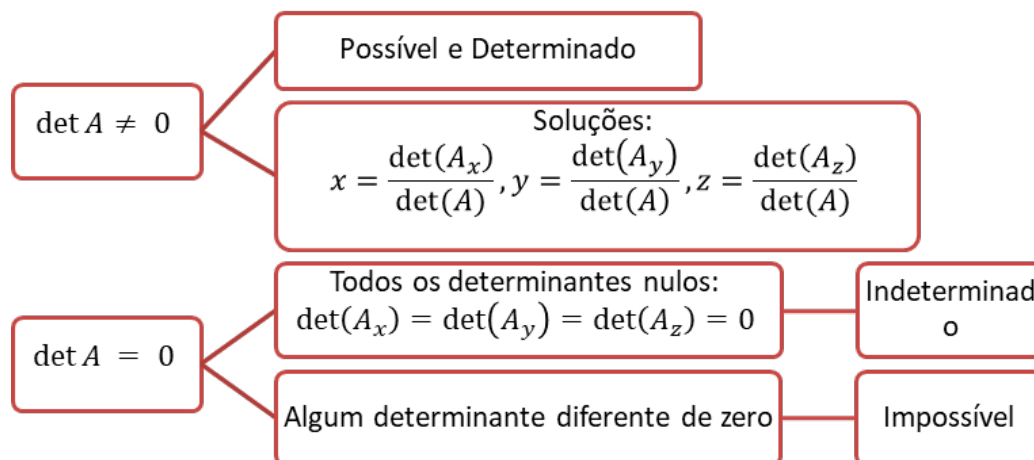
Um sistema será possível e determinado quando o determinante da matriz principal (A) for diferente de zero. Nesse caso, as soluções são dadas por:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}, \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}, \quad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}$$

O sistema será possível e indeterminado quando o determinante da matriz principal (A) e de todas as matrizes auxiliares forem nulos. Nesse caso, o sistema admite infinitas soluções.

Por fim, se o determinante da matriz principal (A) for nulo e alguma das matrizes auxiliares tiver um determinante não nulo, o sistema será impossível.

Vamos esquematizar para você.



DIRETO DO CONCURSO

033. (CESPE/SEDUC-AL/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2021) O sistema linear dado por

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & x \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 2x & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ tem solução para qualquer valor real de } x.$$



Para saber se o sistema possui sempre solução, devemos calcular o determinante da matriz principal do sistema. O sistema terá solução sempre que o determinante dessa matriz for diferente de zero.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 2x & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante pela Regra de Sarrus, temos:

$$3 \cdot x \cdot 6 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot 2x - x \cdot x \cdot 1 - 3 \cdot 2x \cdot 3 - 6 \cdot (-1) \cdot 1 = 0$$

$$18x - 3 + 2x^2 - x^2 - 18x + 6 = 0$$

$$x^2 + 3 = 0$$

$$\therefore x^2 = -3$$

Observe que essa equação não tem nenhuma solução. Portanto, não existe nenhum valor de x que torne o sistema sem solução.

Certo.

034. (FGV/AL-RO/ANALISTA LEGISLATIVO/MATEMÁTICA/2018) Considere o sistema linear:

$$x + 2y + 3z = 160$$

$$2x + 3y + z = 140$$

$$3x + y + 2z = 156$$

O valor de x é:

- a) 20
- b) 22
- c) 24
- d) 26
- e) 28



É uma questão interessante para treinarmos a Regra de Cramer. Primeiramente, vamos escrever a matriz principal do sistema.

$$x + 2y + 3z = 160$$

$$2x + 3y + z = 140$$

$$3x + y + 2z = 156$$

Dessa forma, a matriz principal é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o seu determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- - - + + +

$$\det(A) = 1.3.2 + 2.1.3 + 3.2.1 - 1.1.1 - 2.2.2 - 3.3.3$$

$$\det(A) = 6 + 6 + 6 - 1 - 8 - 27 = -18$$

Façamos o mesmo para a matriz auxiliar A_x , que pode ser obtida substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita x pelos coeficientes independentes.

$$A_x = \begin{bmatrix} 160 & 2 & 3 \\ 140 & 3 & 1 \\ 156 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vamos aplicar a Regra de Sarrus.

$$A_x = \begin{bmatrix} 160 & 2 & 3 \\ 140 & 3 & 1 \\ 156 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- - - + + +

Tomemos o determinante.

$$\det(A_x) = 160 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 156 + 3 \cdot 140 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 156 - 160 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 140 \cdot 2$$

$$\det(A_x) = 960 + 312 + 420 - 1404 - 160 - 560$$

$$\det(A_x) = 1692 - 2124 = -432$$

Portanto, o valor de x é:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-432}{-18} = 24$$

Letra c.

035. (ESAF/AFRFB/2012) Considere o sistema de equações lineares dado por:

$$x + y + z = 0$$

$$x - y + rz = 2$$

$$rx + 2y + z = -1$$

Sabendo-se que o sistema tem solução única para $r \neq 0$ e $r \neq 1$, então, o valor de x é igual a:

- a) $2/r$
- b) $-2/r$
- c) $1/r$
- d) $-1/r$
- e) $2r$



Obteremos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & r \\ r & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & r \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A solução é dada pela razão de determinantes:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}$$

Vamos calcular os determinantes necessários:

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & r \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_x) = 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot r \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - r \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\det(A_x) = 0 - r + 4 - 1 - 0 - 2 = 1 - r$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & r \\ r & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ r & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot r \cdot r + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot r - r \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\det(A) = -1 + r^2 + 2 + r - 2r - 1 = r^2 - r$$

Agora, façamos a razão:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{1-r}{r^2-r} = \frac{1-r}{r(r-1)} = -\frac{1}{r}$$

Letra d.

036. (ESAF/AFRFB/2009) Com relação ao sistema:

$$x + y + z = 1$$

$$\frac{2x-y}{3z+2} = \frac{z+1}{2x+y} = 1$$

Onde $3z + 2 \neq 0$ e $2x + y \neq 0$, pode-se, com certeza, afirmar que:

- a) É impossível
- b) É indeterminado
- c) Possui determinante igual a 4

- d) Possui apenas a solução trivial.
e) É homogêneo.



O sistema veio bastante desarrumado. Precisamos arrumar as suas equações:

$$x + y + z = 1$$

$$\frac{2x - y}{3z + 2} = \frac{z + 1}{2x + y} = 1$$

$$\therefore \frac{2x - y}{3z + 2} = 1 \therefore 2x - y = 3z + 2 \therefore 2x - y - 3z = 2$$

$$\therefore \frac{z + 1}{2x + y} = 1 \therefore z + 1 = 2x + y \therefore 2x + y - z = 1$$

Temos, portanto, o sistema de três equações e três incógnitas:

$$x + y + z = 1$$

$$2x - y - 3z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

Podemos obter a matriz principal do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \therefore \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) \cdot (2) + 1 \cdot 2 \cdot (1) - 1 \cdot (-1) \cdot (2) - (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot (-2)$$

$$\det(A) = +1 - 6 + 2 + 2 + 3 + 2 = 10 - 6 = 4$$

Letra c.

037. (CESPE/INMETRO/TÉCNICO EM METROLOGIA/2010) Um técnico é incumbido de examinar alguns lotes de instrumentos de medida. Em cada lote, ele separa os instrumentos descalibrados dos sem defeito. Em determinado lote, ele verifica que o número de instrumentos sem defeito, x , e o número de instrumentos descalibrados, y , são as soluções do sistema linear

$$3x + 2y = 48$$

$$x + ay = 44$$

Nessa situação, sabendo-se que o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é igual a 7, é correto afirmar que o número de instrumentos examinados nesse lote foi:

- a) 24
- b) 23
- c) 22
- d) 21
- e) 20



A matriz principal do sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} \therefore \det(A) = 7 \therefore \det(A) = 3 \cdot a - 2 \cdot 1 = 3a - 2 = 7$$

$$\therefore 3a = 7 + 2 = 9 \therefore a = \frac{9}{3} = 3$$

Existem várias formas de resolver o sistema. Queremos saber o total dos instrumentos examinados, ou seja, $x + y$. Podemos utilizar a técnica de cálculo com os determinantes.

$$A_x = \begin{bmatrix} 48 & 2 \\ 44 & 3 \end{bmatrix} \therefore \det(A_x) = 3 \cdot 48 - 2 \cdot 44 = 144 - 88 = 56$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 3 & 48 \\ 1 & 44 \end{bmatrix} \therefore \det(A_y) = 3 \cdot 44 - 1 \cdot 48 = 132 - 48 = 84$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{56}{7} = 8$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{84}{7} = 12$$

$$\therefore x + y = 8 + 12 = 20$$

Outra forma de resolver o problema seria trabalhar com as equações para fazer aparecer diretamente a soma $x + y$. Vejamos.

$$3x + 2y = 48$$

$$x + 3y = 44$$

Podemos multiplicar por dois a primeira a equação

$$6x + 4y = 96$$

$$x + 3y = 44$$

Agora, basta somar as duas equações:

$$7x + 7y = 96 + 44 = 140$$

$$x + y = 140/7 = 20$$

Letra e.

038. (FUMARC/SEE-MG/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2018) Para o início do ano letivo, a mãe de Luiza foi à papelaria e comprou 10 canetas, 10 borrachas e 10 lápis, pagando R\$ 23,00. A mãe de Larissa foi à mesma papelaria e adquiriu 8 canetas, 4 borrachas e 20 lápis, gastando R\$ 22,00. Também nessa loja, a mãe das gêmeas Larissa e Melissa adquiriu 18 canetas, 14 borrachas e 15 lápis, dos mesmos tipos dos outros, e pagou R\$ 36,00.

Se a mãe de Fernanda for à mesma papelaria e comprar 20 canetas, 5 borrachas e 30 lápis, de quanto será a sua despesa?

- a) R\$29,00
- b) R\$32,50
- c) R\$38,50
- d) R\$42,00
- e) R\$48,00



Essa é uma questão longa para treinarmos a Regra de Cramer. Montemos o sistema.

$$10C + 10B + 10L = 23$$

$$8C + 4B + 20L = 22$$

$$18C + 14B + 15L = 36$$

As matrizes A e B correspondentes ao sistema são:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \\ 18 & 14 & 15 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 23 \\ 22 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, podemos obter as matrizes auxiliares:

$$A_C = \begin{bmatrix} 23 & 10 & 10 \\ 22 & 4 & 20 \\ 36 & 14 & 15 \end{bmatrix}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 10 & 23 & 10 \\ 8 & 22 & 20 \\ 18 & 36 & 15 \end{bmatrix}, \quad A_L = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 23 \\ 8 & 4 & 22 \\ 18 & 14 & 36 \end{bmatrix}$$

Agora, passemos aos cálculos dos determinantes. Primeiramente, precisamos calcular o determinante da matriz principal.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \\ 18 & 14 & 15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 8 & 4 \\ 18 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 10 \cdot 4 \cdot 15 + 10 \cdot 20 \cdot 18 + 10 \cdot 8 \cdot 14 - 10 \cdot 4 \cdot 18 - 10 \cdot 20 \cdot 14 - 10 \cdot 8 \cdot 15$$

$$\det(A) = 600 + 3600 + 1120 - 720 - 2800 - 1200 = 600$$

$$\det(A_C) = \begin{vmatrix} 23 & 10 & 10 \\ 22 & 4 & 20 \\ 36 & 14 & 15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 23 & 10 \\ 22 & 4 \\ 36 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_C) = 23 \cdot 4 \cdot 15 + 10 \cdot 20 \cdot 36 + 10 \cdot 22 \cdot 14 - 36 \cdot 4 \cdot 10 - 14 \cdot 20 \cdot 23 - 15 \cdot 22 \cdot 10$$

$$\det(A_C) = 1380 + 7200 + 3080 - 1440 - 6440 - 3300 = 480$$

A matriz A_B .

$$\det(A_B) = \begin{vmatrix} 10 & 23 & 10 \\ 8 & 22 & 20 \\ 18 & 36 & 15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 23 \\ 8 & 22 \\ 18 & 36 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_B) = 10 \cdot 22 \cdot 15 + 23 \cdot 20 \cdot 18 + 10 \cdot 8 \cdot 36 - 10 \cdot 22 \cdot 18 - 10 \cdot 20 \cdot 36 - 23 \cdot 8 \cdot 15$$

$$\det(A_B) = 3300 + 8280 + 2880 - 3960 - 7200 - 2760 = 540$$

A matriz A_L .

$$\det(A_L) = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 23 \\ 8 & 4 & 22 \\ 18 & 14 & 36 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 8 & 4 \\ 18 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_L) = 10 \cdot 4 \cdot 36 + 10 \cdot 22 \cdot 18 + 23 \cdot 8 \cdot 14 - 23 \cdot 4 \cdot 18 - 10 \cdot 22 \cdot 14 - 10 \cdot 8 \cdot 36$$

$$\det(A_L) = 1440 + 3960 + 2576 - 1656 - 3080 - 2880 = 240$$

Dessa forma, podemos calcular os preços das canetas, borrachas e lápis.

$$C = \frac{\det(A_C)}{\det(A)} = \frac{480}{600} = R\$0,80$$

$$B = \frac{\det(A_B)}{\det(A)} = \frac{540}{600} = \frac{9}{10} = R\$0,90$$

$$L = \frac{\det(A_L)}{\det(A)} = \frac{240}{600} = \frac{2}{5} = R\$0,40$$

Por fim, vamos calcular o total gasto na compra desejada de 20 canetas, 5 borrachas e 30 lápis.

$$S = 20.0,80 + 5.0,90 + 30.0,60 = 16 + 4,5 + 18 = 38,5$$

Letra c.

039. (Q3746338/CESGRANRIO/BANESE/TÉCNICO BANCÁRIO/2025) Sejam x , y e z números reais que satisfazem ao sistema linear dado a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ -x - z = 1 \end{cases}$$

O valor de $x + y$ é igual a

- a) -3
- b) -1
- c) 0
- d) 1
- e) 3



Podemos trabalhar com as equações para chegar em algo próximo à soma $x + y$. Uma ideia é multiplicar a segunda equação por (-1) .

$$2x + 3y - z = 4$$

$$x + z = -1$$

Podemos, agora, somar as duas equações:

$$3x + 3y = 4 - 1 = 3$$

Podemos dividir tudo por 3.

$$\therefore x + y = \frac{3}{3} = 1$$

Letra d.

040. (Q3407425/CEBRASPE/PREFEITURA DE CACHOEIRO DO ITAPEMIRIM/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2024) Considerando o sistema S acima, julgue os itens subsequentes.

$$S = \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ -x - 2y + 3z = k \end{cases}$$

Independentemente do valor de k , o sistema S será possível e determinado.



O sistema é possível e determinado quando o determinante principal é não nulo. Vejamos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2.1.3 + (-1).(-2).(-1) + 1.3.(-2) - 1.1.(-1) - (-2).(-2).2 - 3.(-1).3$$

$$\Delta = 6 - 2 - 6 + 1 - 8 + 9 = 0$$

Como o determinante principal é nulo, o sistema é indeterminado ou impossível, a depender do valor de k.

Errado.

RESUMO

SOMA DE MATRIZES

- a soma de matrizes só pode ser feita entre duas matrizes de mesma ordem;
- a soma é feita elemento a elemento. Em outras palavras:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- Elemento Neutro:** matriz nula, em que todos os elementos são iguais a zero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

PRODUTO DE MATRIZES

- Para que seja possível realizar o produto AB , precisamos que o número de colunas da matriz A seja igual ao número de linhas da matriz B .

$$C = A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

Vejamos alguns exemplos.

EXEMPLO

$$C = A_{3 \times 2} B_{2 \times 1} = C_{3 \times 1}$$

$$C = A_{4 \times 3} B_{3 \times 3} = C_{4 \times 3}$$

$$C = A_{3 \times 2} B_{3 \times 2} \text{ não é compatível}$$

- o produto de matrizes deve ser feito linha por coluna.

$$A_{3 \times 3} B_{3 \times 1} = C_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1.1 + 1.0 + 1.2 \\ 2.1 + 3.0 + 5.2 \\ 4.1 + 0.9 + 2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 54 \end{bmatrix}$$

- Elemento Neutro:** matriz identidade, em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, e os demais são iguais a zero.

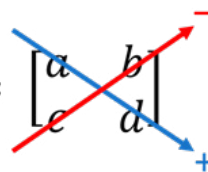
$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DETERMINANTES

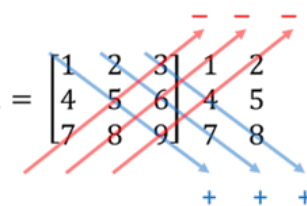
- **Matriz Triangular:** o determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & -4 & 4 \end{bmatrix} \therefore \det A = 1.2.4 = 8$$

- **Matriz 2x2:**

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det(A) = ad - bc$$


- **Matriz 3x3:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$


- **Teorema de Binet:** o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

- **Determinante de Potências:**

$$\det(A^n) = (\det A)^n$$

- **Produto por Escalar:** ao se multiplicar uma linha ou coluna de uma matriz por k, o determinante fica multiplicado por k;
- **Produto por Escalar:** ao se multiplicar a matriz inteira por k, o determinante fica multiplicado por kⁿ, em que n é a ordem da matriz;

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

QUESTÕES COMENTADAS EM AULA

001. (Q3753945/CETREDE/PREFEITURA DE PIRES FERREIRA/MÉDICO/2024) Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

O valor de $A + B$ é:

a) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

002. (Q3737389/CEBRASPE/EMBRAPA/TÉCNICO/2025) Se a matriz C for a matriz resultante do produto entre $A_{3 \times 2}$ e $B_{2 \times 3}$, então C terá 6 linhas e 6 colunas.

003. (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR-BA/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2019) Considere as matrizes $A_{2 \times 3}$ e $B_{2 \times 2}$.

Sobre essas matrizes é correto afirmar que

- a) Existe a soma $A + B$ e é uma matriz 4×5 .
- b) Existe o produto AB e é uma matriz 4×6 .
- c) Existe o produto BA e é uma matriz 4×6 .
- d) Não existe o produto AB .
- e) Não existe o produto BA .

004. (IBFC/PC-PR/PERITO CRIMINAL/2017/ADAPTADA) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, assinale a alternativa que apresenta a matriz C que representa a soma das matrizes A e B, ou seja, $C = A + B$:

005. (IBFC/PC-PR/PERITO CRIMINAL/2017/ADAPTADA) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, assinale a alternativa que apresenta a matriz C que representa a subtração das matrizes A e B, ou seja, $C = A - B$:

006. (CESPE/SEDf/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$ julgue o próximo item. Se $B = \begin{bmatrix} 0 & x & -7 \\ 1 & 0 & z \\ y & 10 & 0 \end{bmatrix}$ e a matriz $A + B$ for simétrica, então $x + y + z = 0$.

007. (Q3482016/COTEC/PREFEITURA DE MONTES CLAROS/FISCAL MUNICIPAL/2024) Uma empresa de logística organiza as distâncias entre três centros de distribuição (A, B, C) e as três principais cidades (X, Y, Z), em uma matriz M. A matriz M é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 15 & 25 & 35 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}$$

em que

- a primeira linha representa as distâncias de A para X, Y e Z, respectivamente.
- a segunda linha representa as distâncias de B para X, Y e Z, respectivamente.
- a terceira linha representa as distâncias de C para X, Y e Z, respectivamente.

Logo, qual é a matriz transposta M^t ?

a) $\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 15 & 25 & 35 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 40 & 50 & 60 \\ 15 & 25 & 35 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$

c)
$$\begin{bmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 25 & 30 & 35 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}$$

d)
$$\begin{bmatrix} 10 & 15 & 40 \\ 20 & 25 & 50 \\ 30 & 35 & 60 \end{bmatrix}$$

e)
$$\begin{bmatrix} 10 & 25 & 40 \\ 15 & 30 & 50 \\ 20 & 35 & 60 \end{bmatrix}$$

008. (Q3661788/INSTITUTO CONSULPLAN/CRP 3/ANALISTA ORGANIZACIONAL/2025) Em uma pesquisa realizada pelo Conselho Regional de Psicologia (CRP), analisou-se a interação entre fatores associados ao desempenho de indivíduos em diferentes tarefas. Essas interações foram representadas pelas matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & x \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

O valor de x , para que o produto $A \cdot B$ seja uma matriz simétrica, é:

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) 2

009. (INSTITUTO CONSULPLAN/CRP 3/ANALISTA ORGANIZACIONAL/ÁREA DE COMPRAS E CONTRATOS/2025) Durante uma análise sobre a relação entre variáveis em um estudo psicológico, um conjunto de matrizes foi utilizado para representar dados de comportamentos. Considere as matrizes A e B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Determine o valor do determinante da matriz $A^T \cdot B$, onde A^T é a matriz transposta de A .

- a) -15
- b) -10
- c) 10
- d) 15

010. (Q3375941/FUNDATEC/PREFEITURA DE PASSO FUNDO/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2024)

O determinante da matriz $A = [a_{ij}]$ 2×2 , tal que $a_{ij} = (i + 2j)^2$, é igual a:

- a) -76.
- b) -17.
- c) -2.
- d) 72.
- e) 724.

011. (Q3736980/FUNDATEC/PREFEITURA DE EREBANGO/ENFERMEIRO/2025) Determine o valor do dobro do determinante da matriz abaixo:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & -7 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

- a) -112
- b) -56
- c) 388
- d) 672
- e) 776

012. (Q3366836/ACAFE/CELESC/ANALISTA ENGENHEIRO/2024) Seja a matriz A , o valor de k , para o qual a matriz A é singular, é:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & k \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- a) 1.
- b) 4.
- c) 3.
- d) 2.
- e) 5.

013. (IADES/CRF-TP/ANALISTA DE TI/2019) Suponha que, na Comissão de Farmácia Hospitalar do Conselho Federal de Farmácia, existam 5 computadores e 3 impressoras. Um sistema foi desenvolvido para controlar o número de páginas impressas diariamente. Esse sistema registra o número de páginas impressas em uma matriz $A = (a_{ij})_{5 \times 3}$ na qual cada elemento a_{ij} registra o número de páginas enviadas pelo computador i para a impressora j . Ao final de determinado dia, verificou-se o registro da matriz, conforme apresentado.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{impressoras} \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 2 & 0 & 25 \\ 0 & 3 & 7 \\ 10 & 13 & 16 \\ 5 & 0 & 30 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{computador 1} \\ \text{computador 2} \\ \text{computador 3} \\ \text{computador 4} \\ \text{computador 5} \end{matrix} \end{matrix}$$

Como exemplo, nesse dia, o computador 1 imprimiu 10 páginas na impressora 2. O total de páginas impressas pelos computadores 2, 3 e 5 na impressora 3 foi igual a

- a) 55.
- b) 62.
- c) 67.
- d) 72.
- e) 80.

014. (IADES/CAU-RO/ARQUITETO E URBANISTA/2018) Suponha que, no CAU/RO, cinco conselheiros foram eleitos para o Conselho Diretor. Na primeira reunião do conselho, eles deveriam eleger entre si um presidente; para tanto, fizeram uma eleição em que cada um deveria votar em outro conselheiro e não poderia votar em si mesmo. Cada um dos cinco conselheiros foi identificado com um número de 1 a 5, e os votos foram representados na matriz $A = (a_{ij})_{5 \times 5}$ apresentada, na qual, para $i \neq j$, se o conselheiro i votar no conselheiro j , e $a_{ij} = 1$; caso contrário, $a_{ij} = 0$. Com base nessas informações, o conselheiro que foi eleito presidente foi o identificado com o número

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) 5.
- b) 1.
- c) 3.
- d) 2.
- e) 4.

015. (CESPE/IFF/2018) Considere que k seja um número real e que o determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ seja igual a 27. Nesse caso, se $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$, então o determinante da matriz $B - A$, será igual a:

- a) 30
- b) 0
- c) 3
- d) 6
- e) 10

016. (CESPE/SEDUC-AL/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2018) Se a é um número real e se o determinante da matriz $P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ for igual a zero, então $a = -2$ ou $a = 1$.

017. (ESAF/DNIT/TÉCNICO ADMINISTRATIVO/2013) Os elementos de uma matriz $A_{3 \times 2}$, isto é, com três linhas e duas colunas, são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} (i+j)^2 & , \text{ se } i = j \\ i^2 + j^2 & , \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Em que a_{ij} representa o elemento da matriz $A_{3 \times 2}$ localizado na linha i e coluna j . Então, a soma dos elementos da primeira coluna de $A_{3 \times 2}$ é igual a:

- a) 17
- b) 15
- c) 12
- d) 19

018. (CESPE/SEDF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$, julgue o próximo item. A matriz A é inversível.

019. (ESAF/AFRFB/2014) A matriz quadrada A , definida genericamente por $A = a_{ij}$, é dada por $a_{11} = 0$; $a_{12} = -4$; $a_{13} = 2$; $a_{21} = x$; $a_{22} = 0$; $a_{23} = (1 - z)$; $a_{31} = y$; $a_{32} = 2z$ e, por último, $a_{33} = 0$. Desse modo, para que a matriz A seja uma matriz antissimétrica, os valores de a_{21} , a_{23} , a_{31} e a_{32} deverão ser, respectivamente, iguais a:

- a) 4; -2; -2; -2.
- b) 4; -2; 2; -2.
- c) 4; 2; -2; -2.
- d) -4; -2; 2; -2.
- e) -4; -2; -2; -2.

020. (IBFC/PC-PR/PERITO CRIMINAL/2017/ADAPTADA) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, assinale a alternativa que apresenta a matriz C que representa a subtração das matrizes A e B, ou seja, $C = AB$:

021. (IBFC/PC-PR/PERITO CRIMINAL/2017/ADAPTADA) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine o elemento d21 da matriz $D = BA$

022. (CESPE/SEDUC-AL/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2018) Julgue o item que se segue, relativo a matriz e sistema linear.

Se a é um número real e se o determinante da matriz

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

for igual a zero, então, $a = -2$ ou $a = 1$.

023. (FGV/SAD-PE/ANALISTA DE CONTROLE INTERNO/FINANÇAS PÚBLICAS/2009) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e seja n um número natural maior que 1. Na matriz A^{2n} , o elemento que ocupa a 1ª linha e 2ª coluna é:

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) n
- e) $2n$

024. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/ENGENHEIRO JÚNIOR/2018) Considere a matriz A apresentada a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Qual é o valor do determinante dessa matriz?

- a) -36
- b) -27
- c) -15
- d) +18
- e) +45

025. (CESGRANRIO/PETROBRÁS/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO E CONTROLE JÚNIOR/2018) Sejam A uma matriz quadrada de ordem 2 e B uma matriz quadrada de ordem 3, tais que $\det A \cdot \det B = 1$. O valor de $\det(3A) \cdot \det(2B)$ é:

- a) 5
- b) 6
- c) 36
- d) 72
- e) 108

026. (CESPE/SEDUC-AL/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2018) Se a é um número real e se o determinante da matriz $P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ for igual a zero, então $a = -2$ ou $a = 1$.

027. (ESAF/AFRFB/2012) As matrizes A, B, C e D são quadradas de quarta ordem. A matriz B é igual a $1/2$ da matriz A, ou seja: $B = 1/2 A$. A matriz C é igual a matriz transposta de B, ou seja: $C = B^t$. A matriz D é definida a partir da matriz C; a única diferença entre essas duas matrizes é que a matriz D tem como primeira linha a primeira linha de C multiplicada por 2. Sabendo-se que o determinante da matriz A é igual a 32, então a soma dos determinantes das matrizes B, C e D é igual a:

- a) 6
- b) 4
- c) 12
- d) 10
- e) 8

028. (ESAF/MF/TÉCNICO ADMINISTRATIVO/2009) Seja uma matriz quadrada 4 por 4. Se multiplicarmos os elementos da segunda linha da matriz por 2 e dividirmos os elementos da terceira linha da matriz por -3, o determinante da matriz fica:

- a) Multiplicado por -1.
- b) Multiplicado por $-16/81$.
- c) Multiplicado por $2/3$.
- d) Multiplicado por $16/81$.
- e) Multiplicado por $-2/3$.

029. (ESAF/MF/ASSISTENTE TÉCNICO ADMINISTRATIVO/2017) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule o determinante do produto AB:

- a) 8
- b) 12
- c) 9

- d) 15
e) 6

030. (ESAF/ANAC/TÉCNICO ADMINISTRATIVO/2016) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, o determinante da matriz $2A$ é igual a:

- a) 40
b) 10
c) 18
d) 16
e) 36

031. (ESAF/ATRFB/2012) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, o determinante de A^5 é igual a:

- a) 20
b) 28
c) 32
d) 30
e) 25

032. (CESPE/SEDUC-AL/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2021) Considerando as matrizes A e B com coeficientes reais dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & x \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 2x & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & x & 3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Julgue o item a seguir.

Se $x = 0$, então a matriz B é invertível e $\det(B^{-1}) = 1/6$.

033. (CESPE/SEDUC-AL/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2021) O sistema linear dado por

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & x \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 2x & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ tem solução para qualquer valor real de } x.$$

034. (FGV/AL-RO/ANALISTA LEGISLATIVO/MATEMÁTICA/2018) Considere o sistema linear:

$$x + 2y + 3z = 160$$

$$2x + 3y + z = 140$$

$$3x + y + 2z = 156$$

O valor de x é:

- a) 20
b) 22
c) 24
d) 26
e) 28

035. (ESAF/AFRFB/2012) Considere o sistema de equações lineares dado por:

$$x + y + z = 0$$

$$x - y + rz = 2$$

$$rx + 2y + z = -1$$

Sabendo-se que o sistema tem solução única para $r \neq 0$ e $r \neq 1$, então, o valor de x é igual a:

- a) $2/r$
- b) $-2/r$
- c) $1/r$
- d) $-1/r$
- e) $2r$

036. (ESAF/AFRFB/2009) Com relação ao sistema:

$$x + y + z = 1$$

$$\frac{2x - y}{3z + 2} = \frac{z + 1}{2x + y} = 1$$

Onde $3z + 2 \neq 0$ e $2x + y \neq 0$, pode-se, com certeza, afirmar que:

- a) É impossível
- b) É indeterminado
- c) Possui determinante igual a 4
- d) Possui apenas a solução trivial.
- e) É homogêneo.

037. (CESPE/INMETRO/TÉCNICO EM METROLOGIA/2010) Um técnico é incumbido de examinar alguns lotes de instrumentos de medida. Em cada lote, ele separa os instrumentos descalibrados dos sem defeito. Em determinado lote, ele verifica que o número de instrumentos sem defeito, x , e o número de instrumentos descalibrados, y , são as soluções do sistema linear

$$3x + 2y = 48$$

$$x + ay = 44$$

Nessa situação, sabendo-se que o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é igual a 7, é correto afirmar que o número de instrumentos examinados nesse lote foi:

- a) 24
- b) 23
- c) 22
- d) 21
- e) 20

038. (FUMARC/SEE-MG/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2018) Para o início do ano letivo, a mãe de Luiza foi à papelaria e comprou 10 canetas, 10 borrachas e 10 lápis, pagando R\$ 23,00. A mãe de Larissa foi à mesma papelaria e adquiriu 8 canetas, 4 borrachas e 20 lápis, gastando R\$ 22,00. Também nessa loja, a mãe das gêmeas Larissa e Melissa adquiriu 18 canetas, 14 borrachas e 15 lápis, dos mesmos tipos dos outros, e pagou R\$ 36,00.

Se a mãe de Fernanda for à mesma papelaria e comprar 20 canetas, 5 borrachas e 30 lápis, de quanto será a sua despesa?

- a) R\$29,00
- b) R\$32,50
- c) R\$38,50
- d) R\$42,00
- e) R\$48,00

039. (Q3746338/CESGRANRIO/BANESE/TÉCNICO BANCÁRIO/2025) Sejam x , y e z números reais que satisfazem ao sistema linear dado a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ -x - z = 1 \end{cases}$$

O valor de $x + y$ é igual a

- a) -3
- b) -1
- c) 0
- d) 1
- e) 3

040. (Q3407425/CEBRASPE/PREFEITURA DE CACHOEIRO DO ITAPEMIRIM/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2024) Considerando o sistema S acima, julgue os itens subsequentes.

$$S = \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ -x - 2y + 3z = k \end{cases}$$

Independentemente do valor de k , o sistema S será possível e determinado.

GABARITO

- | | |
|---------------------|-------|
| 1. a | 35. d |
| 2. E | 36. c |
| 3. d | 37. e |
| 4. 5, 4, 1; 1, 0, 1 | 38. c |
| 5. 2, -2; 4, -5 | 39. d |
| 6. C | 40. E |
| 7. c | |
| 8. d | |
| 9. a | |
| 10. a | |
| 11. a | |
| 12. e | |
| 13. b | |
| 14. d | |
| 15. d | |
| 16. C | |
| 17. d | |
| 18. d | |
| 19. c | |
| 20. 8, 10; 10, 16 | |
| 21. 13 | |
| 22. C | |
| 23. b | |
| 24. b | |
| 25. d | |
| 26. C | |
| 27. e | |
| 28. e | |
| 29. e | |
| 30. a | |
| 31. c | |
| 32. E | |
| 33. C | |
| 34. c | |

Abra



caminhos



crie

futuros

gran.com.br

