

FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE II

Aplicações para aprendizagem:



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. O tempo gasto, em minutos, para que um tanque de 2 litros seja cheio com uma mangueira, levando em consideração uma vazão volumétrica Q , em uma variável aleatória contínua X , com uma função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}; & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & ; \text{ p.q.o.v} \end{cases}$$

- Verifique se $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade;
- Calcule $P(2 \leq x \leq 3)$



O tempo é uma variável contínua

$$f(x) = \frac{x}{4}, \text{ se } x \leq 1 \text{ ou } \geq 3$$

Essa função pode ser ZERO nos demais casos

0, para caso contrário (qualquer outro valor)

A função é constante.

a) Verifique se $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade

A função será FDP?

As três condições são:

- Ser uma variável contínua.

x é o tempo. A variável é realmente contínua.

- A função deve ser positiva.

$\frac{x}{4}$ é positivo porque é $+$ $\frac{x}{4}$ e não $-\frac{x}{4}$

- A superfície integral, a área de $f(x)$ é $= 1$

De 1 até 3

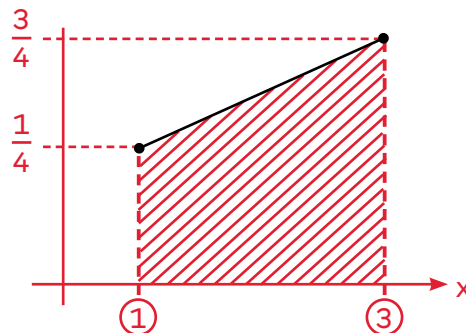
Até o momento, a variável é contínua, a função é positiva e essa área será uma reta $= 1$?

Para fazer de maneira mais simples:

$$f(x) \text{ de } 1 \text{ até } 3 \text{ e } f(x) = \frac{x}{4}$$

$$\text{Quando } x = 1, f(1) = \frac{1}{4}$$

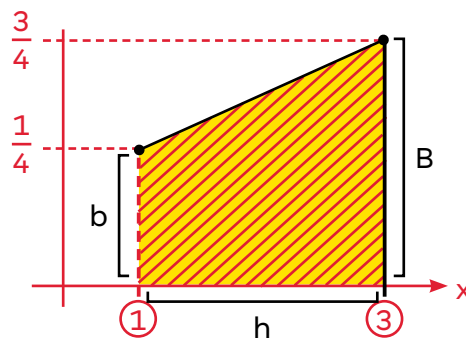
Quando $x = 3$, $f(x) = \frac{3}{4}$



Esta resolução não é por integral.

De 1 até 3 está formado um trapézio.

Um trapézio deitado, com uma base maior (B) e uma base menor (A) e a altura (h).



$A = (B + b) \cdot h$ dividido por 2.

$A = (\frac{3}{4} + \frac{1}{4}) \cdot 2$ dividido por 2

$A = \frac{4}{4} = 1$

Esta era a última condição para ser uma FDP. Está diante de uma Função de Densidade de Probabilidade (FDP). Resolvendo de maneira que a superfície integral:

De 1 até 3

$f(x) \, d(x) = \frac{x}{4} \cdot Dx = \frac{1x}{4} \cdot dx$

$\frac{1}{4}$ superfície integral de $x \cdot dx$

A superfície integral de 1 até 3

A superfície integral de $x = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1}$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2}$

$\frac{x^2}{8}$ (superfície integral).

É a superfície integral, mas como é definida:

$$\frac{x^2}{8} \int_1^3$$

Começa-se primeiramente com o número maior, menos o número menor (3 - 1)

$$\frac{3^2}{8} - \frac{1^2}{8} = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

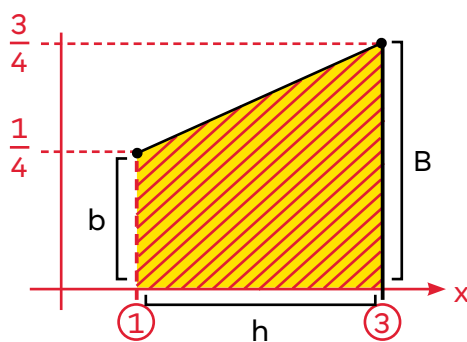
Quando o cálculo foi feito utilizando a área do trapézio, resultou em 1.

Quando o cálculo foi feito por superfície integral, também resultou em 1.

É possível afirmar, com toda a certeza, que a função é realmente uma FDP.

b) Calcule P (2 ≤ x ≤ 3)

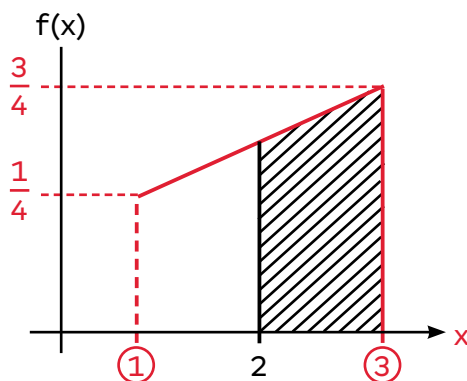
Calcular a Probabilidade de 2 a 3: o que seria isso na realidade?



Toda a área em amarelo da figura acima vale 1.

O que se aprendeu é que probabilidade é área.

Qual é a probabilidade de x entre 2 e 3?



Essa área pode ser calculada por geometria plana ou por superfície integral.

I. A figura é um trapézio

$A = (B + b) \cdot h$ sobre 2

$$A = \frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)}{2} \cdot 1$$

$$A = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{5}{8}$$

II – Uma superfície integral de 2 até 3

$f(x) \cdot dx$

A superfície integral de 2 até 3 = $\frac{x}{4} dx = \frac{1}{4} \cdot \text{de 2 até 3 } dx$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{1} = \frac{x^2}{8}$$

Como é definida:

$$\frac{9}{8} - \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$$



20m

02. (BACEN) Uma variável aleatória do tipo absolutamente contínuo tem a função densidade de probabilidade seguinte:

$f(x) = 1,2 - 0,08x$, se $10 \leq x \leq 15$

$f(x) = 0$, caso contrário

Assinale a opção que dá a probabilidade de que a variável aleatória assuma valores entre 10 e 12.

- a) 0,160
- b) 0,640
- c) 0,500
- d) 0,200
- e) 0,825



$f(x) = 1,2 - 0,08x$, se $10 \leq x \leq 15$

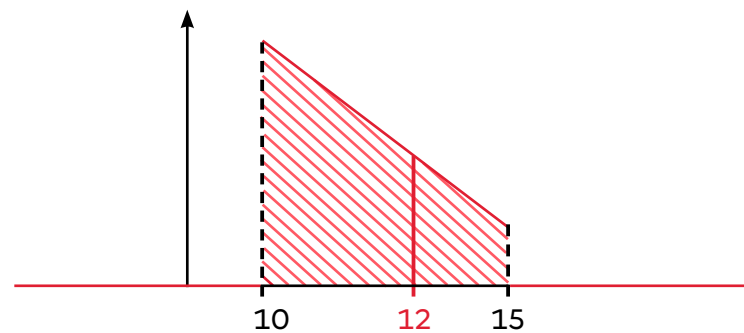
$f(x) = 0$, caso contrário

A probabilidade é a área.

A superfície integral de 10 até 12.

Se $f(x) = 0$ não possui área.

A função é decrescente porque o coeficiente angular é $- 0,08$.



$$(1,2 - 0,08x) dx$$

Havendo uma subtração, as integrais podem ser separadas.

A superfície integral de 10 a 12 = $1,2dx$ – a superfície integral $0,08x dx$.



25m

A primeira é uma constante:

$$1,2 \cdot x - 0,08 x dx$$

Resolvendo apenas a segunda parte:

$0,08 x dx$ (soma 1 ao expoente e depois divide pelo resultado)

$$0,08 \cdot \frac{x^2}{2}$$

Na primeira parte:

Colocando 12 e 10 no lugar de x:

$$1,2 \cdot 12 - 1,2 \cdot 10 = 14,4 - 12 = 2,4$$

Na segunda parte:

$$0,08 \cdot \frac{12^2}{2} - 0,08 \cdot \frac{10^2}{2} = 5,76 - 5 = 1,76$$

$$2,4 - 1,76 = 0,64$$



30m

Seria possível fazer esta questão calculando a área do trapézio?

1. Quando o $x = 10$

$$f(10) = 1,2 - 0,08x$$

$$f(10) = 1,2 - 0,08 \cdot 10$$

$$f(10) = 1,2 - 0,8 = 0,4$$

2. Quando $x = 12$

$$f(12) = 1,2 - 0,08x$$

$$f(12) = 1,2 - 0,08 \cdot 12$$

$$f(12) = 1,2 - 0,96 = 0,24$$

Calculando a área do trapézio:

$$(0,4+0,24) \cdot \frac{2}{2}$$

$$\text{Área do Trapézio} = 0,64$$

O aluno precisa saber o cálculo por superfície integral porque nem sempre a função irá gerar um quadrado, um retângulo ou um trapézio. Poderão ser geradas figuras diferentes.

GABARITO

01. a: C; b: 5/8

02. b

Este material foi elaborado pela equipe pedagógica do Gran Concursos, de acordo com a aula preparada e ministrada pelo professor Josimar Padilha.

A presente gravação tem como objetivo auxiliar no acompanhamento e na revisão do conteúdo ministrado na videoaula. Não recomendamos a substituição do estudo em vídeo pela leitura exclusiva deste material.
