

FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE V

Esta aula dará continuidade ao estudo da matriz de Estatística, focando-se em função de densidade de probabilidade (Fdp). Função de densidade é uma variável contínua e tem alguns parâmetros (média e variância).

Os principais parâmetros são:

- Valor Esperado (média aritmética).
- Variância (X)

VALOR ESPERADO

Seja X uma variável aleatória contínua com fdp função de densidade de probabilidade $f(x)$. O valor esperado de X será definido por:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Para calcular-se o valor esperado, utiliza-se a função $f(x)$ multiplica-se pela variável X e calcula-se sua integral.

Supondo-se $f(x) = 2X$

$0 \leq X \leq 2$ (fpd)

O valor esperado é dado pela integral 0 a 2.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot f(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot 2X \, dX$$

Note-se que aumenta o fator X multiplicado por F de X, e calcula-se integralmente (esse será o valor integral).

PROPRIEDADES DA ESPERANÇA

Seja X uma v. a e c uma constante, então: o valor esperado (média) de uma constante é a própria constante:

$$E(c) = c.$$

Por exemplo: a média de 3 é 3. A média de 5 é 5.

Multiplicando-se ou dividindo-se c por uma variável aleatória X , sua média fica multiplicada por esta constante:



$$E(cX) = cE(X)$$

Somando-se ou subtraindo-se c de uma variável aleatória X , sua média aleatória fica somada ou subtraída dessa constante:

$$E(X \pm c) = E(X) \pm c$$

Note-se que não muda a média aritmética nem o valor esperado, sofre-se influência da multiplicação, da divisão, da soma e da subtração.

A média aritmética é influenciada pelos valores extremos.



DIRETO DO CONCURSO

01. (AFRFB-) A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X é dada por: $f(x) = 3x^2$, se $-1 \leq x \leq 0$ $f(x)=0$, caso contrário. Para esta função, a média de X também denominada expectância de X e denotada por

$E(X)$, é igual a:

- a) $4/3$
- b) $3/4$
- c) $-3/4$
- d) $-3x/4$
- e) $-4x/3$



$f(x) = 3x^2$ se $-1 \leq x \leq 0$. Ou será igual a 0 caso contrário.

X é de -1 a 0 (função $3x^2$)

Para esta função, a média de X (expectância) é denotada por $E(x)$.

Se não tem área, não tem probabilidade.

Na questão busca-se a média da área.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{zero fica em cima e } -1 \text{ em baixo.}$$



10m

$X \cdot f(X) dX$ feito isso basta substituir-se e encontrar-se a área.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot 3x^2 dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} 3X^2 dx$$

Fazendo-se a integral, tem-se:

$$3 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dx = 3 \cdot X^3 / 3$$

Como já integrou-se, agora coloca-se os valores (0 e -1).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = 3 \cdot 0^3 / 3 - 3 \cdot (-1)^3 / 3$$

O resultado de qualquer potência com expoente par será positivo.

$$E(x) = -3/4$$

O valor esperado será $-3/4$.

02. (MPU) O tempo em minutos, X , para a digitação de um texto, é considerado uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por: $f(x) = 1/4$, se $0 \leq x < 2$ $f(x) = 1/8$, se $2 \leq x < 6$ $f(x) = 0$, caso contrário

O valor esperado de X é:

- a) 5
- b) 4
- c) 3,5
- d) 2,5
- e) 1



$$f(x) = 1/4 \text{ se } 0 \leq x < 2$$

$$f(x) = 1/8, \text{ se } 2 \leq x < 6$$



0 = caso contrário

Note-se que há continuidade, ou seja, de 0 a 6 existe área (função constante).

De 0 a 2 = $\frac{1}{4}$

De 2 a 6 = $\frac{1}{8}$

Caso contrário é tudo 0.

Se existe área há probabilidade.

Calcula-se a média da primeira + a segunda.

$\int_{-\infty}^{+\infty}$ 2 em cima e 0 em baixo. Sempre o maior em acima e o menor abaixo.

$$X \cdot f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \text{ a } 6 - X \cdot f(x) dx$$

Substituindo-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (0 \text{ a } 2) x \cdot \frac{1}{4} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (2 \text{ a } 6) X \cdot \frac{1}{8} dx$$

Integra-se as duas e encontra-se o valor esperado

$$E(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (0 \text{ a } 2) + \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{2} (2 \text{ a } 6)$$



$$E(x) = \frac{4}{8} + [36/16 - 4/16]$$

$$E(x) = \frac{4}{8} + \frac{32}{16}$$

Tratando-se de frações de mesmo denominador, conserva-se o de baixo.

$$E(x) = 8 + \frac{36}{16}$$

$$E(x) = \frac{40}{16} = 2,5$$

O valor esperado é 2,5.

03. (CESGRANRIO) A variável aleatória X tem função de densidade de probabilidade $f(x) = 6x \cdot (1-x)$, se $0 < x < 1$ e $f(x)=0$, se $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

Qual é a média de X ?

- a) 0,4
- b) 0,5
- c) 0,6
- d) 0,75
- e) 0,8



$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{integral de 0 a 1}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot f(x) dx$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} X = 6x (1-X) dx$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 6X^2 (1-X) dx$$

Fazendo-se a distributiva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 6x^2 - 6x^3 dx$$

Separando-se a integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 6x^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 6x^3 dx$$

Passando-se a constante para fora:

$$6 \cdot X^3 / 3 \int_{-\infty}^{+\infty} - 6 \cdot X^4 / 4 \int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$6/2 - 6/4$$

$$MMC = 12$$

$$24 - 17/12 = 6/12 = 0,5$$

GABARITO

1. c

2. d

3. b

Este material foi elaborado pela equipe pedagógica do Gran Concursos, de acordo com a aula preparada e ministrada pelo professor Josimar Padilha.

A presente gravação tem como objetivo auxiliar no acompanhamento e na revisão do conteúdo ministrado na videoaula. Não recomendamos a substituição do estudo em vídeo pela leitura exclusiva deste material.
