

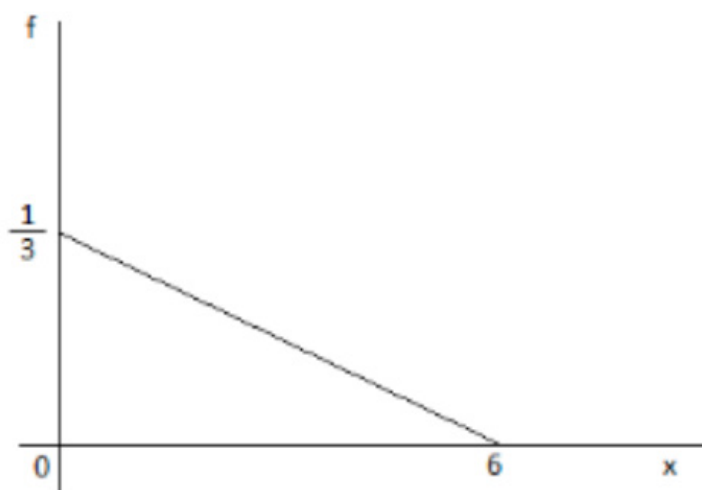
FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE VI

Nesta aula, daremos continuidade ao treinamento.



DIRETO DO CONCURSO

01. (FADESP/UEPA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR/ESTATÍSTICA/2020) A função densidade de probabilidade (fdp) f de uma variável de aleatória X é dada pela função cujo gráfico é mostrado a seguir



Então, a esperança de X , $E(X)$ é igual a

- a) 3.
- b) 2.
- c) 2,1.
- d) 1,5.



No contexto apresentado, a função necessária não foi determinada, exigindo sua modelagem. Trata-se de uma função do primeiro grau, caracterizada por comportamento decrescente. Utilizam-se as variáveis x e $f(x)$ para definir a função.

A função do primeiro grau é expressa como $f(x) = ax + b$, em que b corresponde ao coeficiente linear, responsável por indicar o ponto de interseção com o eixo y . Nesse caso, identifica-se b como sendo igual a $1/3$.

Esse conceito é associado ao estudo da regressão linear simples, onde foi amplamente abordado.

Fórmula: $f(x) = ax + b = +\frac{1}{3}$

Para determinar o ponto de interseção com o eixo x, aplica-se a relação $-b/a$. O coeficiente linear representa o ponto de interseção com o eixo y e corresponde ao termo independente da função. O ponto de interseção com o eixo x é calculado pela expressão $-b/a$:

$$x = \frac{-b}{a}$$

Para obter o coeficiente angular (a), considera-se que $x = 6$ e $-b = 1/3$, o que implica $-b = -1/3$. Substituindo na equação, tem-se $-1/3 = 6a$..

$$6 = \frac{-1}{\frac{3}{a}}$$

Reorganizando os termos, "a" é calculado como $(-1/3) / 6$. Aplicando a regra da multiplicação pelo inverso, obtém-se $-1/3 \cdot 1/6 = -1/18$:

$$a = \frac{-1}{\frac{3}{6}} =$$

$$\frac{-1}{\frac{3}{6}} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{18}$$

Assim, o coeficiente angular (a) é $-1/18$.

A função determinada é do primeiro grau, com comportamento decrescente, como indicado pelo gráfico. Esse comportamento é explicado pelo coeficiente angular $-1/18$, comprovando a correção do cálculo.

A função resultante é $f(x) = -1/18x + 1/3$, com xx variando no intervalo $[0,6]$, ou seja, $0 \leq x \leq 6$:

$$f(x) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3}$$

$$0 \leq x \leq 6$$



5m

O ponto de interseção com o eixo x é calculado pela expressão $-b/a$, conforme demonstrado.

O **valor esperado**, também conhecido como esperança matemática, pode ser compreendido como o ponto de equilíbrio de uma distribuição. Para calcular o valor esperado em um triângulo, é possível utilizar a integral ou a geometria plana.

No caso do triângulo, o ponto de equilíbrio é denominado baricentro, que representa o ponto central da figura. Utilizando a geometria plana, o cálculo do baricentro (x e y) envolve a média das coordenadas dos vértices. Para x, somam-se as coordenadas x dos três

vértices e divide-se o resultado por 3. Da mesma forma, para y, somam-se as coordenadas y e divide-se por 3.

Este processo equivale ao cálculo da média aritmética das coordenadas, o que pode ser associado ao conceito de valor esperado. Entretanto, opta-se pela abordagem com o uso de integrais para maior precisão no cálculo.

Para calcular o valor esperado, ou expectativa matemática, utiliza-se a integral definida no intervalo de 0 a 6, em que a função é multiplicada por x. A função previamente determinada é $f(x) = -1/18x + 1/3$. Assim, a integral a ser resolvida é:

$$E(x) = \int_0^6 x \cdot f(x) dx = \int_0^6 \left(-\frac{1}{18}x + \frac{1}{3} \right) dx$$

Ao aplicar a distributiva, a integral é dividida em dois termos, resultando em:

$$\int_0^6 -\frac{x^2}{18} + \frac{x}{3} dx \rightarrow -\frac{1}{18} \int_0^6 x^2 dx + \frac{1}{3} \int_0^6 x' dx$$

Para o primeiro termo, realiza-se o cálculo da integral. Substituem-se os limites de integração. O resultado é multiplicado pelo fator constante.

Para o segundo termo, também se realiza o cálculo da integral. Substituem-se os limites de integração e o resultado é multiplicado pelo fator constante.

Ao somar os dois resultados, obtém-se o valor final.

$$-\frac{1}{18} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^6 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^6 = \frac{1}{18} \cdot \frac{216}{3} + \frac{36}{6} =$$

$$-\frac{216}{54} + 6 = -4 + 6 = 2$$

Portanto, o valor esperado, ou expectativa matemática, é igual a 2.

A variável considerada é x. Para determinar o baricentro de um triângulo, utiliza-se as coordenadas xg e yg, em que g representa o baricentro. A coordenada x do baricentro pode ser encontrada somando as coordenadas x de cada vértice do triângulo e dividindo o resultado pelo número de vértices.

No caso de um triângulo com vértices no ponto superior esquerdo com coordenada 0, 1/3, o vértice inferior direito em 6,0 e o centro do vértice em 0,0, essas coordenadas são utilizadas no cálculo para encontrar a posição do baricentro.

Para determinar o valor de x, somam-se as coordenadas xx dos três pontos, que são:

$$xg, yg = \frac{0 + 0 + 6}{3} = 2$$

Portanto, o valor de x é igual a 2, considerando que o cálculo é realizado em função de x.



10m

02. (CESPE/CEBRASPE/MPE-RO/ANALISTA EM ESTATÍSTICA/2023) O valor esperado de uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade $f(x) = c \sqrt{x^5}$, na qual $x \in [0,1]$ e c é uma constante real positiva, é igual a

- a) $1/2$.
- b) $1/3$.
- c) $3/4$.
- d) $7/9$.
- e) $4/5$.



O cálculo consiste em duas etapas. Primeiramente, deve-se determinar a constante. Para isso, realiza-se a integral e, em seguida, iguala-se o resultado a 1, procedimento que possibilita encontrar a constante da função.

O valor esperado de uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade exige o cálculo da constante desconhecida na função fornecida.

A função é dada da seguinte forma:

$$f(x) = c\sqrt{x^5}$$

Onde c é a constante a ser determinada. O intervalo de x é limitado entre 0 e 1, ou seja, $0 \leq x \leq 1$, e a constante c é um número real positivo:

$$0 \leq x \leq 1$$

A fórmula segue a seguinte estrutura:

$$f(x) = c\sqrt{x^5}, 0 \leq x \leq 1$$

Para calcular o valor esperado, deve-se, inicialmente, determinar a constante. Após a determinação de c , realiza-se o cálculo do valor esperado. Esse processo consiste em duas etapas simultâneas.

$$\sqrt[2]{x^5} =$$

A expressão acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x^{\frac{5}{2}}$$

Aplica-se a regra de potenciação e radiciação.

$$\sqrt[2]{x^5} = x^{\frac{5}{2}}$$

Dessa forma, a raiz quadrada de x^5 é equivalente a x elevado à potência $5/2$.



15m

A função $f(x)$ é, portanto, expressa como a constante, a ser inicialmente determinada, multiplicada por $x^{5/2}$.

Inicialmente, é necessário determinar a constante. Para isso, realiza-se a integral no intervalo de 0 a 1, conforme especificado. A função utilizada é $C \cdot x^{5/2}$ com dx . O resultado dessa integral é igual a 1, o que possibilita a determinação da constante.

$$f(x) = c\sqrt{x^5}, 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = c \cdot (x)^{\frac{5}{2}}$$

$$\int_0^1 c \cdot x^{\frac{5}{2}} dx = 1$$

A constante deve ser fatorada para fora da integral. A função a ser integrada é ajustada de acordo com a regra de potenciação. Para efetuar a integração, soma-se 1 ao expoente, resultando em um novo valor. A integral, então, é reescrita de forma adequada.

Aplicando os limites de integração, é possível determinar a constante, e seu valor pode ser calculado:

$$c \int_0^1 c \cdot x^{\frac{5}{2}} dx = 1$$

$$c \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \int_0^1 = 1$$

A integral é avaliada aplicando-se os limites de integração. Ao substituir o valor de $x = 1$, o resultado de 1 elevado a 7,5 é igual a 1, uma vez que qualquer número elevado à potência de 1 permanece igual a 1.

Assim, o valor da integral se reduz a uma expressão que envolve a constante multiplicada por 1 sobre 7,5. Ao rearranjar a equação, a constante é determinada como 7,5.

Portanto, a constante é igual a 7,5 ou, de forma equivalente, 3,5.

$$c \cdot \frac{1}{\frac{7}{2}} = 1$$

$$c = \frac{7}{2}$$

$$c = 3,5$$

O valor esperado da função de densidade de probabilidade, definida no intervalo de 0 a 1, deve ser calculado. A função a ser utilizada é $f(x)$, com a variável dx no intervalo indicado.



20m

O valor esperado é calculado utilizando a função que já contém a constante previamente determinada, cujo valor é $7/2$. A expressão final é a constante multiplicada por $X^{5/2}$.

A constante, com valor $7/2$, é fatorada para fora da integral. Em seguida, realiza-se a multiplicação de x por x , somando-se os expoentes, uma vez que as bases são iguais. O expoente de x torna-se $7/2$, formando a expressão $X^{7/2}$ a ser integrada.

A integral é resolvida corretamente utilizando o valor de $7/2$. Ao somar 1 ao expoente de x , o valor de $7/2$ é transformado em $9/2$, o que corresponde a 4,5 ou $9/2$.

Após a substituição nos limites de 0 a 1, o cálculo é simplificado, considerando que $1^{9/2} = 1$. O resultado da operação é $7/2$ dividido por $9/2$, o que simplifica para aproximadamente $7/9$, chegando ao valor esperado.

$$E(x): \int_0^1 x \cdot f(x) dx$$

$$E(x): \int_0^1 x \cdot \frac{7}{2} \cdot X^{\frac{5}{2}} dx = \frac{7}{2} \int_0^1 X^{\frac{7}{2}} dx$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{X^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} \int_0^1 \frac{\frac{7}{2} \cdot 1}{\frac{9}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{7}{9}$$

Toda função de uma v.a X , também é uma variável aleatória. Logo, é possível falar na

esperança de X^2 , $2X + 1$, entre outras. Assim, Se X é discreta $\rightarrow E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x^2 \cdot ip(xi)$

Se X é uma contínua $\rightarrow E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f(x) dx$.



ATENÇÃO

A variância de uma variável discreta foi calculada previamente, por meio do somatório de X^2 multiplicado pela sua probabilidade. No entanto, no contexto atual, trata-se de uma variável contínua. Para calcular o valor esperado de X^2 , deve-se substituir x por X^2 na fórmula.

O valor esperado é calculado por meio da integração de x multiplicado pela função de densidade $f(x)$, no intervalo de $-\infty$ e $+\infty$.

O valor esperado de X^2 é calculado realizando a integral no intervalo de $-\infty$ e $+\infty$, substituindo x por X^2 na expressão. A única modificação consiste na troca de x por X^2 na fórmula.

$$E(x) \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f(x) dx$$

$$E(X^2) - \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f(x) dx.$$

A variância é calculada como a diferença entre o valor esperado de X^2 e o quadrado do valor esperado de x . O procedimento consiste em determinar o valor esperado de x , elevá-lo ao quadrado, e calcular o valor esperado de X^2 . A variância é obtida subtraindo o quadrado do valor esperado de x do valor esperado de X^2 .

$$Vai(x) = E(X^2) - [E(x)]^2$$



DIRETO DO CONCURSO

03. (QUADRIX/CRM/MG/ESTATÍSTICO/2023) Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por

Assinale a alternativa que apresenta a variância de X .

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) $\frac{1}{6}$
- d) $\frac{1}{9}$
- e) $\frac{1}{18}$



O cálculo utiliza a função $f(x) = 2x$, definida no intervalo entre zero e um, para determinar a variância. O procedimento segue os passos descritos abaixo:

1. O valor esperado é determinado por meio da integral no intervalo considerado, resultando no valor $\frac{2}{3}$.

$$f(x) = 2, 0 \leq x \leq 1 \quad Vai(x) = E(X^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x) \int_0^1 X \cdot f(x) dx$$

$$E(x) \int_0^1 X \cdot 2x dx$$

$$E(x) \int_0^1 2 X^2$$

$$2 \cdot \frac{X^3}{3} \int_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$Vai(x) = E(X^2) - [E(x)]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

2. O valor esperado de X^2 é calculado da mesma forma, substituindo x por X^2 na integral, o que resulta em $1/2$.

$$E(X^2) = \int_0^1 X^2 - 2x \, dx = 2 \int_0^1 X^3 \, dx$$

$$2 \cdot \frac{X^4}{4} \int_0^1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

3. A variância é obtida subtraindo o quadrado do valor esperado do valor esperado de X^2 . É possível realizar o MMC, assim o resultado final do cálculo é $1/18$.

$$Vai(x) = E(X^2) - [E(x)]^2$$

$$Vai(x) = \frac{2}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9}{18} - \frac{4}{18} = \frac{5}{18}$$

Portanto, a variância da variável x é igual a $1/18$.

GABARITO

01. b

02. d

03. e

Este material foi elaborado pela equipe pedagógica do Gran Concursos, de acordo com a aula preparada e ministrada pelo professor Josimar Padilha.

A presente gravação tem como objetivo auxiliar no acompanhamento e na revisão do conteúdo ministrado na videoaula. Não recomendamos a substituição do estudo em vídeo pela leitura exclusiva deste material.